

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE

UNIVERSITÉ JEAN MONNET  
DE SAINT-ÉTIENNE

N° D'ORDRE : 130 GD

# THÈSE

Présentée par

**Jean-Michel OLIVA**

pour obtenir le titre de

# DOCTEUR

DE L'UNIVERSITÉ JEAN MONNET

ET DE

L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE

(Spécialité : Informatique, Image, Intelligence artificielle et Algorithmique)

## Reconstruction Tridimensionnelle d'Objets Complexes à l'aide de Diagrammes de Voronoï Simplifiés

*(Application à l'Interpolation 3D de Sections Géologiques)*

*Soutenue à Saint-Étienne le 9 Octobre 1995, devant le Jury composé de :*

Bernard PÉROCHE

Annick MONTANVERT

Jean-Daniel BOISSONNAT

Sabine COQUILLART

Antonio GUILLEN

Bernard LAGET

Michel PERRIN

Président

Rapporteur

Rapporteur

Examineur

Examineur

Examineur

Examineur



ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE

UNIVERSITÉ JEAN MONNET  
DE SAINT-ÉTIENNE

N° D'ORDRE : 130 GD

## THÈSE

Présentée par

**Jean-Michel OLIVA**

pour obtenir le titre de

## DOCTEUR

DE L'UNIVERSITÉ JEAN MONNET

ET DE

L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE

(Spécialité : Informatique, Image, Intelligence artificielle et Algorithmique)



# Reconstruction Tridimensionnelle d'Objets Complexes à l'aide de Diagrammes de Voronoï Simplifiés

*(Application à l'Interpolation 3D de Sections Géologiques)*

*Soutenue à Saint-Étienne le 9 Octobre 1995, devant le Jury composé de :*

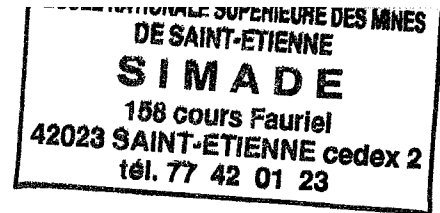
Bernard PÉROCHE  
Annick MONTANVERT  
Jean-Daniel BOISSONNAT  
Sabine COQUILLART  
Antonio GUILLEN  
Bernard LAGET  
Michel PERRIN

Président  
Rapporteur  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur  
Examineur  
Examineur





## Remerciements



Je tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude à Michel PERRIN et à Bernard PÉROCHE qui, en proposant à un géologue de formation d'effectuer le DEA Images à Saint-Étienne, m'ont donné l'opportunité de m'initier à une nouvelle discipline, l'informatique graphique. Je remercie Messieurs Hubert PÉLISSONNIER et Bernard PÉROCHE pour m'avoir accueilli dans leurs formations doctorales respectives.

J'adresse des remerciements tout particuliers à mon directeur de thèse, Michel PERRIN, qui m'a accueilli à l'Écoles des Mines de Paris, pour les encouragements, l'aide et le soutien qu'il m'a prodigués et pour la confiance qu'il m'a témoignée durant ces quatre années.

Je remercie Annick MONTANVERT et Jean-Daniel BOISSONNAT pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ce travail, ainsi que pour les remarques constructives qu'ils ont faites.

L'intérêt que Sabine COQUILLART a montré pour mon travail a été un vif encouragement. Je la remercie sincèrement pour sa patience, sa disponibilité et son aide lors de la conception et de la réalisation de la bande vidéo résumant mon travail. Je suis heureux qu'elle ait accepté de participer à mon Jury. Je profite de l'occasion pour remercier encore une fois toute l'équipe Audio-Visuel de l'INRIA Rocquencourt (UCIS) pour leur gentillesse et leur disponibilité, notamment Arghyro PAOURI qui a été d'une aide précieuse dans la présentation de certains résultats.

J'adresse mes remerciements à Antonio GUILLEN et à Bernard LAGET dont la présence dans le Jury témoigne de l'intérêt qu'ils portent à ce travail.

Je tiens à remercier Michel DEVEUGHELE pour m'avoir accueilli au Centre de Géologie de l'Ingénieur, ainsi que l'ensemble des personnels du CGI qui m'ont apporté leur aide.

Je remercie Monsieur LÉVY, Directeur de l'École des Mines de Paris, ainsi que Monsieur WEIL, Directeur des Recherches, pour le financement qu'ils m'ont accordé.

La curiosité que m'ont provoquée les cours de Jean-Michel MOREAU est à la base de mon intérêt pour la "Géo-Algo". Que l'auteur en soit ici remercié.

Je n'oublie pas mes camarades de la première heure de l'EMSE, Page, Gilles, Franck, Thierry, et ceux du Centre de Géologie Générale et Minière, Anne, Hugues, Joël et les autres, notamment Mohamad CHEAITO qui m'a enseigné les mystères d'UNIX, de vi., et m'a montré "quelques trucs" dans ce langage que l'on nomme le C...



Un grand merci à Monsieur Georges Stamon Directeur du laboratoire SIP, ainsi qu'à toute son équipe, Yann, Vannary, Jean-Marc, Lionel, Cheaouki, (Florence... bis repetita !) pour leur accueil, leur gentillesse et leurs précieux conseils.

Enfin un regard complice et attendri pour ceux que j'aime et qui m'ont "supporté" durant ces vingt et quelques années, et ceux qui ont eus la "chance" de ne me connaître que plus tard... en espérant que certaines ne se vengent pas quand viendra leur tour...

Et puis comme me le répète inlassablement mon père depuis la sixième :

" Encore un petit effort et après c'est fini !".



*A ma famille,*

*A Florence...*



## Résumé

Nous nous intéressons au problème de la reconstruction tridimensionnelle d'objets complexes à partir de coupes sériées.

Le premier chapitre du mémoire s'attache à montrer l'intérêt de mettre à la disposition de la modélisation géologique 3D un ensemble d'outils variés et notamment des méthodes d'interpolation et de reconstruction adaptées. Le second chapitre pose la problématique générale de la reconstruction 3D et propose un état de l'art sur les méthodes existantes. Ces deux chapitres composent la première partie du manuscrit.

Dans la deuxième partie du mémoire nous proposons une nouvelle méthode de reconstruction 3D qui permet de traiter de manière simple et automatique l'ensemble des problèmes de topologie (trous, branchements multiples, contours isolés). Elle s'appuie sur la construction adaptative de coupes intermédiaires par interpolation entre les sections initiales (chapitre 3). Ce processus utilise un diagramme de Voronoï généralisé simplifié, le réseau bissecteur, comme outil d'interpolation 2D. Nous fournissons une description géométrique complète du réseau bissecteur 2D et nous montrons que sa complexité algébrique est la même que celle des éléments qui permettent de le calculer (segments en 2D, portions de plans en 3D). Nous proposons ensuite deux algorithmes de construction des réseaux bissecteurs interne et externe de formes polygonales éventuellement trouées, dont la complexité en temps est respectivement en  $O(n^2 \log n)$  et  $O(n^2)$ , et la mémoire en  $O(n^2)$  et  $O(n)$  respectivement (chapitre 4).

La mise en correspondance des contours est abordée dans le chapitre 5 et nous suggérons quelques solutions pour traiter certains problèmes délicats.

La construction du réseau bissecteur permet ensuite d'obtenir une surface valide de l'objet en guidant de manière directe la triangulation entre les points des différentes sections. Il n'y a donc pas besoin de post-traitements. De plus, l'ajout automatique de portions de coupes intermédiaires dans les zones de changements de topologie ou de variations de morphologie permet une meilleure définition des surfaces générées (chapitre 6).

Dans la dernière partie du mémoire nous discutons les résultats obtenus et nous les comparons avec ceux de deux méthodes existantes (chapitre 7).

**Mots-clés :** Reconstruction 3D, Triangulation, Interpolation, 2D, 3D, Diagramme de Voronoï Généralisé, Réseau Bissecteur, Squelette, Modélisation Géologique, Coupes Parallèles.

☛ Certaines illustrations couleurs du chapitre 7 sont disponibles sur : <http://www.ensmp.fr/~oliva>



## Abstract

Our aim is the problem of the three-dimensional reconstruction of complex objects from cross-sectional contours.

In the first part, we show that the 3D geological modelling requires a various set of tools for modelling and interpolating geological bodies from various types of data (chapter 1). Then, we detail the set of problems of the 3D reconstruction and we propose a full review of the various approaches (chapter 2).

In the second part of the manuscript, we propose an original method of 3D reconstruction. Our approach allows to deal with all the topological variations as multi-branching, holes, and islands, in an automatic and easy way (chapter 3). It builds intermediate sections in a flexible way by interpolating initial contours. This process uses a simplified Voronoi diagram, the bisector network, as a 2D interpolating tool. We propose a full geometric description of the bisector network, and show its low algebraic complexity (linear segments in 2D, portions of plane in 3D). Then, we propose two algorithms for building the internal and external bisector networks of a polygonal shape with holes. They run respectively in  $O(n^2 \log n)$  and  $O(n^2)$  and the memory storage is in  $O(n^2)$  and  $O(n)$  respectively (chapter 4).

In the chapter 5 we discuss the correspondance problem and we suggest some solutions for critical problems.

The building of this structure allows to obtain a valid surface by meshing in a simple way all points of the various sections. Furthermore, by adding automatically portions of intermediate contours in the areas of topological and morphological variations, the method allows a best definition of the reconstructed surface (chapter 6).

In the last part we discuss the results of the 3D reconstruction and we compare it with results of others methods (chapter 7).

**Keywords :** 3D Reconstruction, Triangulation, Interpolation, 2D, 3D, Generalized Voronoi Diagram, Bisector Network, Skeleton, Geological Modelling, Parallel Cross-section.

☛ *Some color illustrations of chapter 7 are available on the server : <http://www.ensmp.fr/~oliva>*





# Tables des matières

<b>INTRODUCTION</b>	<b>1</b>
<i><b>PREMIÈRE PARTIE : Modélisation géologique 3D et méthodes de reconstruction</b></i>	
<b>CHAPITRE I - La modélisation 3D et les objets géologiques</b>	<b>7</b>
<i>I.1 - L'informatique géologique</i>	7
<i>I.2 - Apport de la modélisation géologique 3D</i>	8
I.2.1 - Stockage et restitution rapide des différentes données	9
I.2.2 - Visualisation "optimale" de l'ensemble de ces données en 2D et en 3D	10
I.2.2.1 - Les outils d'une modélisation descriptive	11
I.2.2.2 - La modélisation géodynamique	13
I.2.3 - Conclusion	17
<i>I.3 - Les données et les objets géologiques</i>	18
I.3.1 - Les données géologiques	18
I.3.2 - Les objets géologiques et leur syntaxe	20
<i>I.4 - Types de modélisation à adopter</i>	26
I.4.1 - Les approches classiques de modélisation	26
I.4.2 - Le besoin d'une modélisation spécifique	27
<i>I.5 - Regards sur les modélisations géologiques descriptives existantes</i>	29
<i>I.6 - Conclusion</i>	37
<b>CHAPITRE II - Les méthodes de reconstruction 3D à partir de coupes 2D</b>	<b>39</b>
<i>II.1 - Importance de la reconstruction 3D à partir de coupes géologiques</i>	39
<i>II.2 - Problématique d'ensemble</i>	40
II.2.1 - Les différents formats de données	40
II.2.2 - Approches dites "volumiques"	43
II.2.3 - Approches dites "surfaiques"	45
II.2.4 - La problématique de la reconstruction 3D	46
<i>II.3 - Mise en correspondance des contours</i>	47
II.3.1 - Les approches automatiques dites locales	49
II.3.2 - Les approches automatiques dites globales	52
II.3.3 - Conclusion	54
<i>II.4 - Construction de la surface ou du volume de l'objet</i>	55
II.4.1 - Les trois grands types d'approches	55
II.4.1.1 - Méthodes optimales	55
II.4.1.2 - Méthodes heuristiques	57
II.4.1.3 - Méthodes par appariement des points des contours	58
II.4.2 - Problèmes liés à la triangulation entre deux contours	59
II.4.3 - Solutions apportées aux cas de branchements multiples	64

## **SECONDE PARTIE : Exposé de la méthode de reconstruction 3D**

<b>CHAPITRE III - Aperçu de la méthode de reconstruction 3D</b>	<b>79</b>
III.1 - Introduction.....	79
III.2 - Les étapes de la méthode de reconstruction .....	80
III.2.1 - Mise en correspondance des contours de deux sections.....	80
III.2.2 - Recherche de la triangulation dans les zones différences.....	81
III.2.2.1 Génération des surfaces triangulées.....	83
III.2.2.2 Détermination du contour intermédiaire.....	85
III.3 - Algorithme général.....	86
 <b>CHAPITRE IV - Diagrammes de Voronoï et réseau bissecteur</b>	 <b>89</b>
IV.1 - Rappels sur les diagrammes de Voronoï.....	89
IV.1.1 - Diagramme de Voronoï entre points.....	89
IV.1.2 - Diagramme de Voronoï généralisé et axe médian.....	91
IV.1.2.1 - Diagramme de Voronoï généralisé.....	91
IV.1.2.2 - Axe médian .....	93
IV.1.3 - Approximations du diagramme de Voronoï généralisé .....	95
IV.2 - Le réseau bissecteur .....	99
IV.2.1 - Modèle de croissance cristalline.....	100
IV.2.1.1 - Croissance cristalline et contours parallèles .....	101
IV.2.1.2 - Notations et définitions.....	102
IV.2.1.3 - Examen de situations locales.....	104
IV.2.1.3.1 - Cas A : point de suture.....	104
IV.2.1.3.2 - Cas B : point de rupture de type B.....	105
IV.2.1.3.3 - Cas C : point de rupture de type C.....	108
IV.2.1.3.4 - Cas D : point de rupture de type D.....	110
IV.2.1.4 - Détermination de l'ensemble des contours parallèles .....	113
IV.2.1.5 - Propriétés des contours parallèles.....	119
IV.2.2 - Définitions et propriétés du réseau bissecteur d'une forme polygonale.....	125
IV.3 - Algorithme de construction.....	129
IV.3.1 - Algorithme de construction par croissance .....	130
IV.3.1.1 - Initialisation de l'algorithme .....	130
IV.3.1.2 - Traitement de l'ensemble des points de rupture potentiels .....	133
IV.3.2 - Algorithme de construction par division et fusion d'un polygone sans trous.....	134
IV.3.2.1 - Principe de l'algorithme de fusion de deux chaînes.....	134
IV.3.2.2 - Algorithme .....	139
IV.3.2.3 - Complexité de l'algorithme.....	141
IV.3.3 - Algorithme de construction du réseau bissecteur d'un polygone avec trous.....	143
IV.3.4 - Algorithme de construction du réseau bissecteur externe de polygones.....	147

<b>CHAPITRE V - Problèmes de mise en correspondance</b>	<b>151</b>
<i>V.1 - Caractérisation du type des données, choix d'une stratégie de mise en correspondance</i>	151
V.1.1 - Caractérisation des formes.....	152
V.1.1.1 - Formes dont l'ajustement est possible.....	152
V.1.1.2 - Formes dont l'ajustement est délicat.....	153
V.1.2 - Choix d'une stratégie de reconstruction.....	155
<i>V.2 - Ajustement des formes</i> .....	156
V.2.1 - Ajustement manuel.....	156
V.2.2 - Ajustement automatique.....	157
<i>V.3 - Méthodes par appariement de points</i> .....	159
V.3.1 - Regards sur les méthodes de programmation dynamique.....	159
V.3.2 - L'apport d'un descripteur de formes.....	161
V.3.2.1 - Utilisation des informations données par le réseau bissecteur.....	161
V.3.2.2 - Extension aux formes non connexes et trouées.....	162
<b>CHAPITRE VI - Interpolation et reconstruction 3D</b>	<b>165</b>
<i>VI.1 - Détermination des zones différences</i> .....	165
VI.1.1 - Balayage de type "Bentley et Ottmann".....	167
VI.1.2 - Extension de l'algorithme à la construction des formes.....	170
VI.1.2.1 - Modifications et ajouts de structure de données.....	170
VI.1.2.2 - Analyse de l'algorithme.....	173
VI.1.2.3 - Présentation de l'algorithme.....	177
VI.1.3 - Cohérence topologique du balayage, imprécisions et dégénérescences.....	179
VI.1.4 - Caractéristiques des zones différences.....	180
<i>VI.2 - Construction des coupes intermédiaires</i> .....	183
VI.2.1 - Squelettisation des zones différences.....	184
VI.2.2 - Extraction des portions de contours et des zones différences intermédiaires.....	185
VI.2.2.1 - Zones bicolores.....	186
VI.2.2.1.1 - Zones sans intersection.....	186
VI.2.2.1.2 - Zones avec intersections.....	189
VI.2.2.2 - Zones unicolores.....	191
VI.2.3 - Construction effective des sections intermédiaires.....	192
VI.2.4 - Tests d'arrêt de la construction des sections intermédiaires.....	194
VI.2.4.1 - Tests d'arrêt dictés par l'utilisateur.....	194
VI.2.4.2 - Tests d'arrêt fonction de la morphologie des contours.....	196
<i>VI.3 - Triangulation des zones différences</i> .....	197
VI.3.1 - Triangulation d'une zone différence bicolore non trouée.....	198
VI.3.1.1 - Triangulation d'une zone différence "simple".....	198
VI.3.1.2 - Triangulation d'une zone différence "complexe".....	200
VI.3.2 - Généralisation de l'algorithme à toutes les zones bicolores.....	203
VI.3.3 - Tests d'arrêt de la procédure de triangulation.....	205
VI.3.4 - Triangulation des zones différences unicolores.....	207
VI.3.5 - Amélioration de la triangulation.....	210
VI.3.5.1 - Diminution du nombre de petits triangles.....	210
VI.3.5.2 - Traitement des zones de variations mineures de morphologie.....	211

## ***TROISIÈME PARTIE : Résultats, tests et extensions***

<b>CHAPITRE VII- Résultats, comparaisons et discussions</b>	<b>215</b>
<i>VII.1 - Résultats</i> .....	215
VII.1.1 - Corps de topologie simple.....	216
VII.1.2 - Corps de topologie et de morphologie complexes.....	220
VII.1.3 - Corps de forme filaire avec excroissances.....	228
<i>VII.2 - Discussions</i> .....	229
VII.2.1 - Complexité et temps de calculs.....	229
VII.2.2 - Comparaisons des résultats.....	230
<i>VII.3 - Extensions</i> .....	232
VIII.3.1 - Création de maillages 2D et 3D.....	232
VIII.3.2 - Reconstruction de coupes d'orientations quelconques.....	233
VIII.3.3 - Interpolation et extrapolation de surfaces.....	234
<b>CONCLUSION</b>	<b>235</b>
<b>LISTES DES FIGURES</b>	<b>239</b>
<b>RÉFÉRENCES</b>	<b>247</b>

# - INTRODUCTION -

L'intitulé de ce mémoire pourrait surprendre à juste titre plus d'un lecteur, tant il semble en effet que les problèmes de reconstruction tridimensionnelle soient résolus depuis longtemps. Les preuves en sont les nombreuses visualisations 3D de crânes, de cerveaux, et autres organes, qui s'affichent périodiquement sur les écrans de nos téléviseurs. S'il est vrai que dans le domaine médical les techniques de reconstruction 3D sont aujourd'hui quasiment au point, il n'en va pas de même dans toutes les disciplines, et particulièrement dans le domaine qui nous préoccupe, à savoir la géologie.

Bien que la plupart des méthodes de reconstruction existantes ne soient pas liées à un domaine particulier, il faut se demander si elles peuvent être utilisées efficacement dans le cadre d'une modélisation spécifique. Nous verrons qu'en fonction de la nature et de la complexité des données la réponse peut être négative. Certains problèmes, comme la reconstruction de coupes d'orientation quelconque, sont souvent très peu abordés et ne sont toujours pas résolus. D'autre part, s'intéresser à un champ applicatif précis soulève souvent des problèmes spécifiques dont le traitement ne permet pas toujours d'utiliser les méthodes classiques de résolution.

Nous nous sommes intéressés à la reconstruction d'objets 3D à partir de données situées sur des sections planes. Ce travail s'inscrit dans le contexte plus général d'une réflexion sur les besoins d'une modélisation géologique 3D et sur les moyens à mettre en œuvre pour y parvenir. Cette démarche a été le point de départ de mon travail de thèse, il m'a donc paru utile de rappeler certaines caractéristiques de cette modélisation et de livrer dans le premier chapitre quelques-unes des idées que nous avons eues au cours de ces trois années de recherche.

Cette réflexion s'accompagne d'une synthèse bibliographique des principales approches mises en œuvre lors de reconstructions tridimensionnelles et qui fait l'objet du deuxième chapitre. Ces deux chapitres sont regroupés dans la première partie de ce mémoire.

La seconde partie regroupe les chapitres III à VI et présente la méthode de reconstruction que nous proposons. Le chapitre III expose d'une manière générale notre démarche d'interpolation et de reconstruction, tandis que nous donnons dans le chapitre IV la définition du réseau bissecteur qui est au cœur de notre approche. Le chapitre V traite des problèmes de mise en correspondance des sections que rencontre toute méthode de reconstruction 3D, ainsi que ceux, plus spécifiques, que nous avons pu rencontrer dans le domaine de la géologie. La construction de coupes intermédiaires et la phase finale de triangulation de l'ensemble des sections sont décrites dans le chapitre VI.

La troisième partie comprend le chapitre VII qui présente les résultats et les tests, ainsi que la comparaison avec d'autres méthodes de reconstruction. Enfin, quelques applications du réseau bissecteur 2D et de son extension 3D sont suggérées.







# **PREMIÈRE PARTIE**



**Modélisation géologique 3D**

**et**

**Méthodes de reconstruction 3D**



# - CHAPITRE I -

## La modélisation 3D et les objets géologiques

Ce premier chapitre consiste en une présentation de la modélisation infographique tridimensionnelle en géologie. Notre but n'est pas de faire un exposé exhaustif sur l'état de l'art en modélisation géologique 3D, mais de montrer les raisons qui motivent l'approche elle-même, et de faire sentir au lecteur les différences importantes qui existent avec d'autres disciplines où la modélisation 3D est également utilisée.

### I.1 - L'informatique géologique

Comme de nombreuses autres disciplines, la géologie tire bénéfice des outils informatiques depuis près de trente ans [LAFF 72]. D'abord utilisés comme moyens de stockage des données et comme simples outils de calcul (normes pétrographiques par exemple), les ordinateurs ont permis par la suite de résoudre des problèmes plus complexes, comme les simulations numériques de transfert dans les acquifères, l'établissement de cartes altimétriques et de cartes de niveau piezométriques, etc... Les nombreux problèmes soulevés en géologie, comme l'estimation globale des teneurs en minerai à partir de données discrètes, ou l'étude des compositions pétrographiques de lames minces issues d'échantillons prélevés par sondage, ont ensuite servi de support à l'élaboration de nouvelles disciplines à part entière comme la géostatistique [MATH 62] et la morphologie mathématique [SERR 82].

Si certaines branches de la géologie utilisent depuis longtemps les outils informatiques pour traiter les aspects quantitatifs liés à leur activité (géostatistique, géochimie, pédologie, géophysique, géologie de l'ingénieur, etc...), les domaines qui comportent une forte composante descriptive, comme la géologie structurale, n'utilisent ces moyens que depuis peu ou les ignorent. En effet, seuls quelques outils de création et de visualisation bidimensionnelles<sup>5</sup>, et quelques logiciels de visualisation de surfaces sont assez couramment utilisés.

La mise au point d'outils de modélisation et de visualisation tridimensionnelles spécifiques à la géologie semble être la prochaine étape de cette évolution. Au vu de cette évolution prévisible, il paraît judicieux de se demander ce que peut amener une telle modélisation tridimensionnelle, et en quoi elle doit être spécifique. Les paragraphes suivants essaient de proposer quelques éléments de réponse à ces différentes questions.

---

<sup>5</sup> Logiciels de Dessin Assisté par Ordinateur (D.A.O.)

## I.2 - Apport de la modélisation géologique 3D

La géologie est la science qui étudie les différentes composantes du sol et du sous-sol. Le travail des géologues consiste à observer ces structures, à les répertorier et à rendre compte de leurs relations. Les méthodes d'observation peuvent être directes, elles permettent alors d'appréhender les structures qui affleurent à la surface topographique, ou indirectes, les structures sont alors déduites des différentes méthodes d'exploration du sous-sol. Les géologues manipulent donc en permanence des données tridimensionnelles dont ils devront déterminer l'appartenance stratigraphique et tectonique.

Ces éléments permettront dans un troisième temps de préciser les relations entre les différentes composantes qui font l'objet de l'étude, et d'établir un scénario stratigraphique et tectonique, sous la forme d'une légende de carte par exemple.

Le rôle du géologue est donc :

- de sélectionner, de répertorier, de classer les données, et de les référencer les unes par rapport aux autres. Ce travail de classification nécessite déjà une part d'interprétation au niveau des données brutes.
- de compléter par interpolation et/ou extrapolation les données incomplètes,
- d'assembler ces différents éléments de structures afin de décrire une scène complète,
- d'interpréter à un haut niveau ces différentes structures.

Ces données de terrain peuvent être par ailleurs complétées par des résultats obtenus en laboratoire (études pétrographiques et pétrophysiques, géochimie, ...), qui permettent de corréler l'ensemble des informations.

La phase finale d'interprétation nécessite que le géologue ait accès à un moyen fiable et pratique pour visualiser en trois dimensions les données. Ceci est classiquement réalisé en géologie par l'établissement de cartes, de coupes géologiques et de blocs-diagrammes, où il s'agit d'effectuer une synthèse claire des différentes données recueillies par le géologue. Cette phase de synthèse permet au géologue de lever les éventuelles contradictions entre les hypothèses qu'il énonce et la réalité des données. Cette démarche conduit à définir une stratégie d'aller et retour entre l'interprétation de la géologie d'une zone et la recherche de nouvelles informations.

La finalité de ce processus est de définir les théories qui permettent d'expliquer la genèse des structures observées et l'action des différents processus sur ces structures.

Cette observation parcellaire du travail d'un géologue permet d'ores et déjà de mettre en évidence deux actions que peuvent remplir efficacement les systèmes informatiques :

- a - Stockage et restitution rapide des différentes données,
- b - Visualisation "optimale" de l'ensemble de ces données en deux et en trois dimensions.

### **I.2.1 - Stockage et restitution rapide des différentes données**

L'intérêt d'utiliser l'outil informatique est de pouvoir stocker facilement un grand nombre de données sous des formats hétérogènes, de les conserver et d'y accéder rapidement quand cela est nécessaire. Le paragraphe I.3.1 est en partie consacré au recensement des différentes données susceptibles d'être utilisées en modélisation géologique (données 2D et 3D, photos aériennes, Modèle Numérique de Terrains (MNT), données géophysiques, géochimiques, etc...). Un tel système de stockage doit aussi être capable de restituer rapidement l'ensemble des informations concernant une zone déterminée et ce, quelle que soit l'échelle de l'étude. De plus, cette consultation doit pouvoir se faire de façon sélective, par exemple : "consulter les données de telle zone géographique, concernant la limite entre les deux formations A et B".

Sans faire de grands efforts d'imagination, on peut s'apercevoir que cette tâche à elle seule est complexe. Il s'agit en fait de définir une structure qui s'apparente aux Systèmes d'Informations Géographiques (SIG), mais qui s'applique aux données géologiques (SIGéol). Comme ces données sont tridimensionnelles, ce système d'informations devra donc être en trois dimensions. Cela demande un lourd travail d'inventaire des différents types de données, et une définition précise des structures de données capables d'accepter des informations aussi bien géométriques que sémantiques (par exemple, position géographique d'un sondage, profondeur et formations rencontrées, description des faciès, interprétation et commentaires du sondeur, etc...).

Une qualité importante de ce type de système doit être sa capacité à échanger des informations avec d'autres bases de données géologiques. Ceci passera sans doute par l'établissement, à grande échelle, de normes pour les formats de données numériques spécifiques à la géologie.

### **I.2.2 - Visualisation "optimale" de l'ensemble de ces données en 2D et en 3D**

La visualisation des données, peut être perçue en partie comme la finalité de la première étape. Il est inutile d'effectuer des campagnes coûteuses de récoltes de données si celles-ci ne peuvent pas être exploitées. En effet, un géologue peut à juste titre être désarmé s'il doit travailler dans une zone précise dont il possède un nombre important de sondages bruts et s'il ne peut pas les corréler. L'outil informatique peut alors permettre de faciliter la synthèse visuelle des différentes données.

Aujourd'hui l'informatique est souvent utilisée en deux dimensions lors de la réalisation de cartes ou de coupes géologiques, notamment grâce aux logiciels de D.A.O. de type "*Adobe Illustrator*". En 3D son utilisation est beaucoup plus anecdotique. Mis à part quelques logiciels comme "*AVS*" qui ne sont pas adaptés à la géologie, mais qui permettent de visualiser des surfaces altimétriques ou renversées, il n'existe pas d'outils permettant de prendre en compte l'ensemble des données utilisées en géologie. Ceci est en partie dû à la variété et à la complexité des problèmes rencontrés dans cette discipline.

L'étape de visualisation 3D ne se résume pas simplement à l'affichage des différentes données sur un écran, mais suppose la construction d'un vrai modèle, géologiquement exploitable. Le géologue doit pouvoir identifier l'ensemble des formations présentes dans le modèle, appréhender les formes et l'extension spatiale des différentes structures, et observer leurs relations.

La représentation 3D de caractéristiques volumiques doit aussi être un objectif de cette visualisation. La représentation des caractères physiques des roches (comme la porosité, la conductivité, etc...) ou des caractères tectoniques (degré de fracturation, orientation de la schistosité, etc...) est souvent d'un intérêt majeur pour les géologues. Il s'agit de visualiser en même temps des informations à petite et à grande échelle afin de vérifier s'il existe ou non des influences entre la structure générale d'un massif et les caractéristiques pétrophysiques des roches.

Par ailleurs en géologie de l'ingénieur, ce type de modélisation doit servir de support pour visualiser les différents ouvrages à implanter dans un site. L'examen des sites d'implantation de ces ouvrages par rapport au sous-sol peut conduire à un meilleur positionnement de ceux-ci, en cherchant par exemple à éviter les zones trop fracturées ou en positionnant un tunnel dans un encaissant permettant une excavation plus facile.

Un troisième aspect du travail du géologue qui n'a pas encore été évoqué est la simulation des processus physiques et leur quantification : par exemple, l'estimation du potentiel des réservoirs pétroliers, l'étude d'un site de stockage de matières premières ou de déchets, ou le calcul des transferts de flux et de polluants dans le sous-sol et dans les aquifères. Ces travaux s'appuient sur les caractéristiques physico-chimiques des milieux

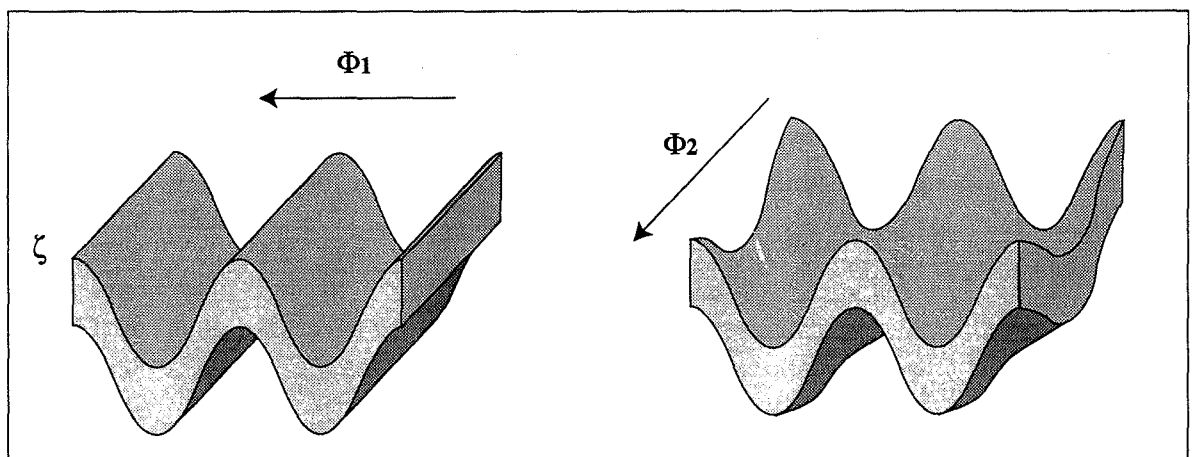
étudiés (porosité, granulométrie, compositions chimiques, etc...), et utilisent des méthodes numériques de résolution, comme les éléments finis. Ces modèles sont actuellement calculés sur des géométries très simplifiées qui ne permettent pas de rendre compte de manière satisfaisante de la complexité du milieu étudié. De ce fait, leurs résultats s'appuient sur des hypothèses contraignantes (milieux isotropes et sans interactions par exemple), qui sont difficilement observables dans un environnement naturel.

Ces domaines d'études recherchent donc de plus en plus des géométries réalistes sur lesquelles les différents modèles puissent être calés. Il est alors indispensable de disposer de systèmes de modélisation et de visualisation géologiques 3D.

Il existe au moins deux types de modélisation, la modélisation descriptive et la modélisation géodynamique. Nous donnons une définition de ces deux approches dans les paragraphes suivants en précisant les types d'outils qui peuvent être utilisés dans chacun des cas.

#### I.2.2.1 - Les outils d'une modélisation descriptive

La géologie est une science où le facteur temps joue un rôle particulier. Les structures géologiques sont modifiées au cours du temps, et les processus qui sont responsables des déplacements et des déformations subis par ces structures ne sont appréhendables que par les traces physiques, chimiques et géométriques, qu'ils ont laissées sur les différents corps géologiques.



**Figure I.1 :** La couche  $\zeta$  subit deux déformations successives  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$ .

Ainsi une phase de compression  $\Phi_1$  est décelée par le plissement d'une couche géologique  $\zeta$ . Une deuxième phase de compression  $\Phi_2$ , postérieure à  $\Phi_1$ , s'appliquant à la même couche  $\zeta$ , et ayant une orientation perpendiculaire à la première phase, produira une surface en "dômes et bassins" qui s'apparente à la forme d'une boîte d'œufs (cf. fig. I.1).

La modélisation géologique tridimensionnelle doit bien sûr être capable de représenter fidèlement la couche plissée à partir d'un nombre fini de données. C'est le type de modélisation que nous appelons "modélisation statique".

- *Outils de modélisation statique*

C'est ce type de modélisation qui est utilisée dans la plupart des domaines où des modèles géométriques sont nécessaires. Les outils de modélisation statique permettent d'agencer les données de bases, de construire les surfaces et de définir les volumes de la scène géologique. Les surfaces et les volumes construits doivent fournir une description géométrique exacte des structures observées et il est nécessaire que ces éléments respectent les données initiales. Son premier but est d'assurer la cohérence géométrique et topologique du modèle géométrique.

En revanche, il est clair que les outils de construction ne permettent pas toujours de garantir la topologie "géologique" des différents corps appartenant au modèle. Prenons l'exemple de la construction d'une partie d'un gisement minier connu par deux sections horizontales. Il s'agit d'une minéralisation qui s'est développée dans une structure plissée ou qui a été plissée après sa mise en place. Chaque section est formée par un seul contour où les axes de plis sont visibles. La reconstruction 3D directe de cet objet aboutit à la formation d'une surface trouée. Le modèle est géométriquement correct, par contre il n'est pas cohérent au sens géologique.

Il faut contraindre la construction de l'objet, par exemple en imposant une correspondance au niveau des têtes de plis, pour aboutir à une description géologique correcte de l'objet (cf. fig. V.1 - page 153).

- *Outils de modélisation dynamique*

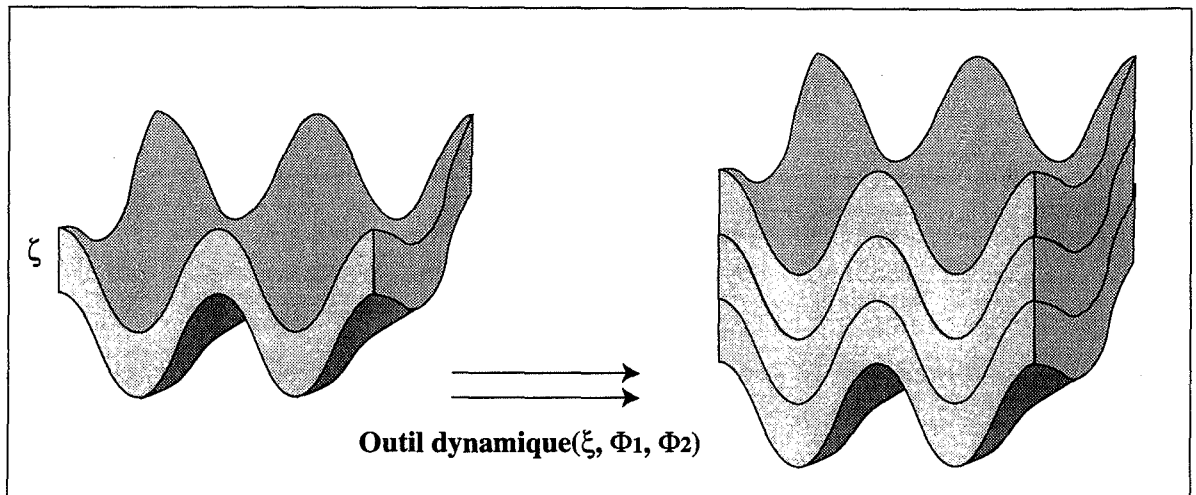
Revenons un instant à l'exemple de la couche en dômes et bassins.

Comme les volumes géologiques ne contiennent pas de vide, cette couche possède des couches voisines supérieures et inférieures qui sont, dans le cas d'une stratification normale, respectivement plus récentes et plus anciennes que la couche  $\zeta$ . La modélisation complète de cette zone implique donc aussi la modélisation des couches voisines de la couche  $\zeta$ .

On peut, dans un premier temps, imaginer la construction de l'ensemble de ces couches, surface par surface, en s'appuyant sur les données disponibles si celles-ci sont suffisamment nombreuses et bien réparties.

Si ces données sont peu nombreuses, il est possible d'envisager des outils qui permettent, à partir de la connaissance des paramètres des phases de plissement  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$ , de déduire les couches voisines de  $\zeta$ , en les contraignant par les données existantes sur ces couches.





**Figure I.2 :** Exemple d'application d'un outil "dynamique" pour modéliser une scène.

De tels opérateurs (cf. fig. I.2), que nous appelons "outils de modélisation dynamique", ne sont pas assimilables à de simples déformations de surfaces. Plus généralement, les outils de modélisation dynamique peuvent être utilisés pour définir des structures, non plus seulement à partir de l'agencement des données de terrain (comme des points, des lignes ou des surfaces), mais en appliquant les conséquences géométriques de processus géologiques subis par les structures.

Ces opérateurs peuvent être d'un grand intérêt dans la modélisation de scènes géologiques complexes. Sous le terme "scène géologique", nous désignons un volume fini, composé de  $N$  objets géologiques que nous voulons modéliser.

### **I.2.2.2 - La modélisation géodynamique**

Alors que la modélisation descriptive a pour objet de décrire le plus fidèlement une scène géologique à partir des données disponibles sur la zone à étudier, la modélisation géodynamique permet de créer un modèle à partir d'une géométrie initiale supposée, sur laquelle on applique les conséquences géométriques des processus mis en évidence par les géologues. Il s'agit d'une démarche directe.

La modélisation analogique utilise la même démarche. Différents matériaux ayant des caractéristiques physiques particulières (viscosité, plasticité, élasticité, conduction électrique et thermique) sont disposés en couches successives qui représentent un état initial supposé. On applique ensuite sur ces couches, différentes contraintes de traction, de compression, de torsion, etc..., avec une faible intensité et pendant un temps assez long. On observe alors de manière critique les déformations obtenues et on les compare avec les théories existantes. La relation entre le type de matériaux utilisé et le temps nécessairement fini des expériences, ne

permet pas toujours de décrire fidèlement les processus naturels dont on peut observer les conséquences. Il faut donc veiller à conserver des conditions de similitude entre les facteurs expérimentaux et les facteurs réels.

La modélisation géodynamique ne prend pas directement en compte le facteur temps, et permet ainsi de tester rapidement plusieurs hypothèses.

Une telle modélisation dynamique est une aide à l'interprétation et permet de valider les hypothèses émises par les géologues. Ce type de modèle permet de vérifier l'existence effective de phases de déformations et de tester la géométrie initiale supposée. Elle peut inciter le géologue à étudier de nouvelles hypothèses ou à affiner sa théorie quand les résultats obtenus ne sont pas conformes aux attentes.

La même démarche peut être effectuée de manière inverse. Il est possible, en partant de la géométrie actuelle d'une structure géologique, d'appliquer les conséquences inverses de processus géologiques, afin de retrouver l'état initial de la géométrie de cette structure. Pour cela, il faut bien sûr disposer d'opérateurs inversibles.

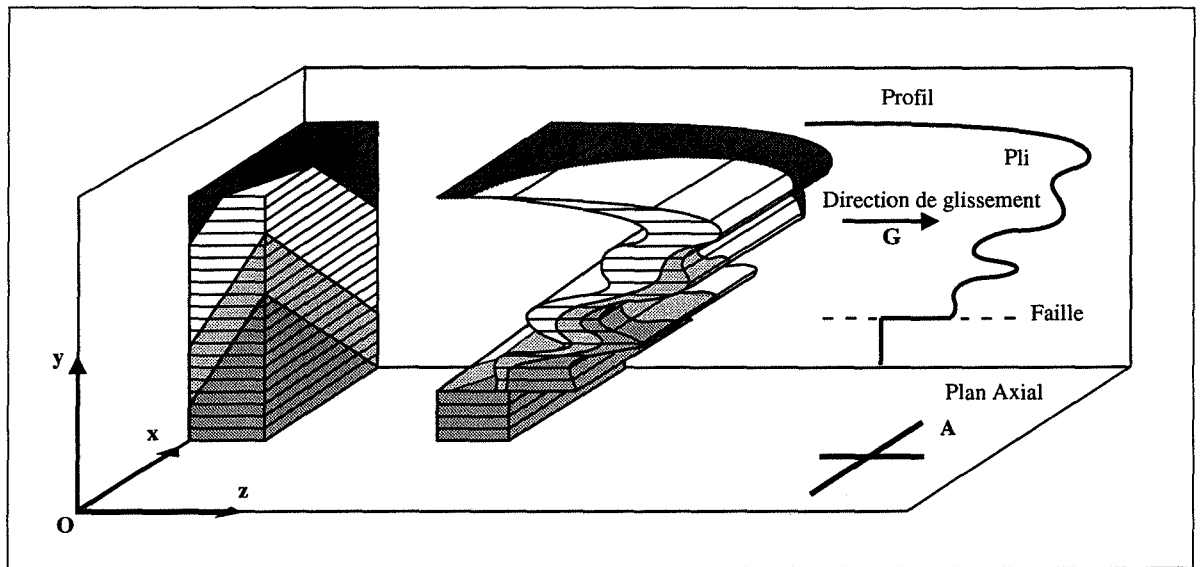
Dans le domaine informatique, les tentatives que nous connaissons d'une telle modélisation sont issues des travaux réalisés à l'Institut Français du Pétrole (IFP) et à l'École des Mines de Paris (EMP) [PECH 93]. Il en résulte entre autres les logiciels LOCACE et POLYPLI.

LOCACE est un logiciel développé par l'IFP qui permet de restituer l'aspect initial d'un bassin sédimentaire (marge passive) afin de définir ses potentialités en terme de gisement pétrolifère. Il permet d'annuler les failles et les plis affectant les différentes formations qui sont visibles sur une coupe sismique effectuée à la verticale du gisement pressenti. Il décompacte ensuite l'ensemble des terrains et fournit ainsi la géométrie anté-déformations du bassin. Ce logiciel travaille uniquement sur des coupes, donc sur des données en deux dimensions.

Le logiciel POLYPLI, développé par l'EMP et par le BRGM<sup>6</sup>, opère réellement en trois dimensions. Il applique à une stratigraphie initiale, supposée plane, une série de déformations de "type semblable" qui sont définies par l'utilisateur et qui simulent les conséquences géométriques de processus géologiques.

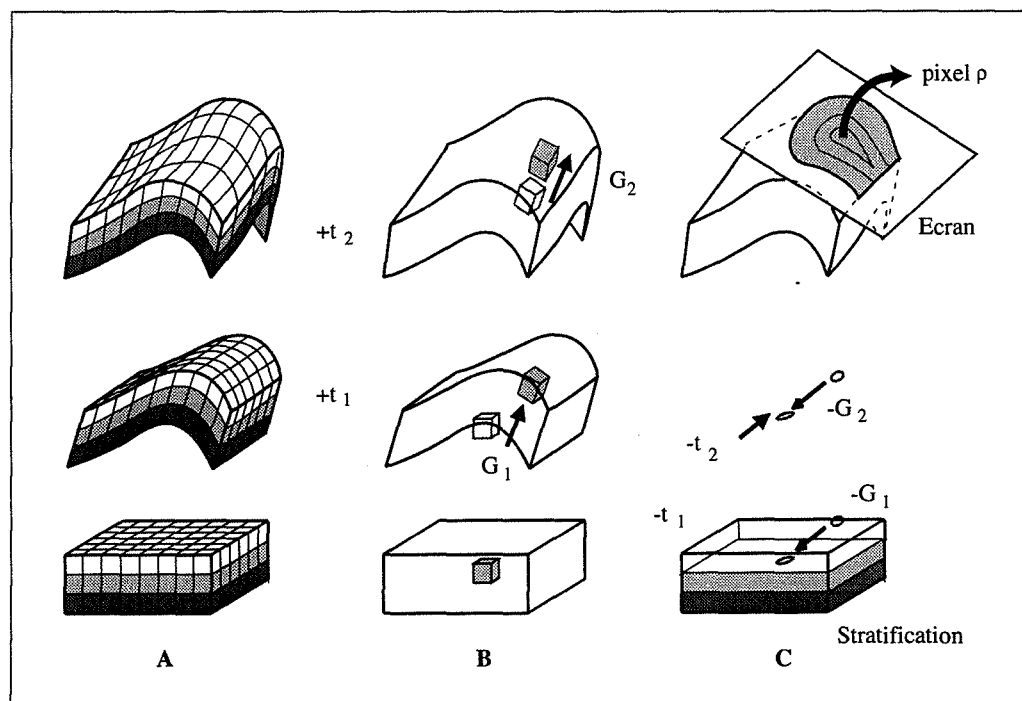
---

<sup>6</sup> Bureau de Recherche Géologique et Minière



**Figure I.3 :** Cisaillements simples utilisés dans POLYPLI, d'après [PECH 93].

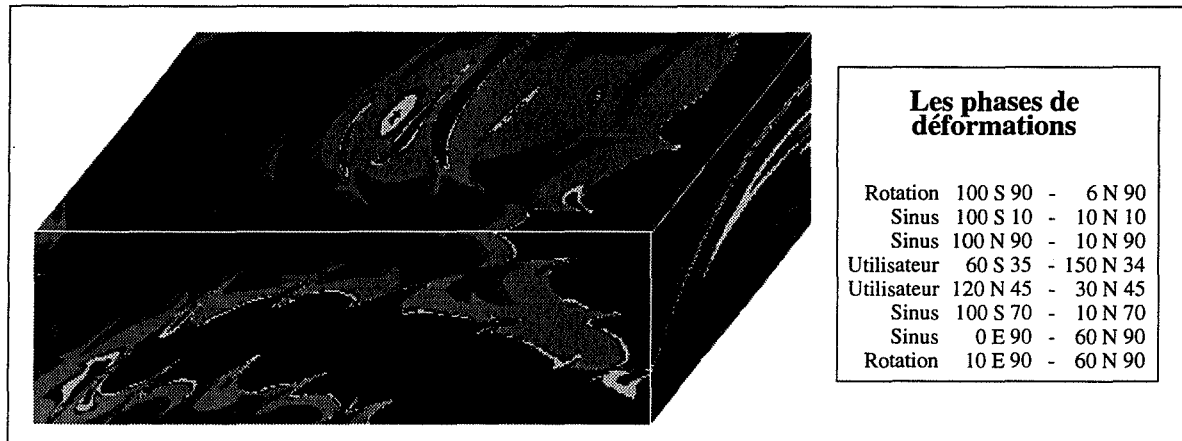
Ces déformations sont des cisaillements simples qui permettent de simuler des plis semblables et des failles (cf. fig. I.3). La scène ainsi modélisée est visualisée sous forme de coupes ou de blocs diagrammes. POLYPLI définit un modèle 3D virtuel dans le sens où l'on ne connaît du modèle à l'instant  $t$  que les points affichés à l'écran.



**Figure I.4 :** Recherche de la position stratigraphique d'un point de l'écran dans POLYPLI, d'après [PECH 93].

La position stratigraphique de chacun des points est calculée au moment de l'affichage en fonction des différentes phases de déformations qu'il a pu subir (cf. fig. I.4).

Des extensions visant à intégrer dans la stratigraphie des objets surfaciques 3D, à caler le modèle dans l'espace, et à positionner précisément les différentes phases de déformations sont en cours de développement.



**Figure I.5 :** Exemple de modélisation à l'aide de POLYPLI. Les phases utilisées pour obtenir le résultat sont décrites par la nature du profil, le plan axial et la droite de glissement.

Ce type de logiciel permet par exemple de modéliser les structures régionales d'une zone donnée à partir des grandes phases de déformations mises en avant par les géologues. Il est donc avant tout un moyen de validation d'hypothèses structurales (cf. fig. I.5).

De telles approches permettent, non pas de modéliser fidèlement une structure géologique dont on possède de nombreuses données, mais de définir des "analogues" des structures que l'on observe. Ces analogues ne correspondent pas dans le détail à une réalité observable. Il s'agit ici de reproduire le même type de structures que celles que l'on observe, en appliquant les conséquences géométriques des mêmes processus de formation que ceux supposés pour la structure réelle. Néanmoins, l'utilisation d'opérateurs inversibles dans une démarche inverse permet de caler les modèles sur une géométrie actuelle par une démarche de type aller et retour.

Si les hypothèses sur la genèse des différents corps sont exactes, le modèle possède la même charge d'informations structurelles et sémantiques que le modèle réel.

En ce sens, la modélisation dynamique est spécifique. Elle devra comporter une phase encore plus pointue d'analyse et de compréhension de la scène à modéliser, ainsi que des processus mis en jeu.

### I.2.3 - Conclusion

En résumé, nous dirons que les modèles géologiques 3D nécessitent l'emploi de trois types de **ressources** :

- Des **bases de données 2D et 3D** regroupant l'ensemble des informations géologiques disponibles.
- Des **outils de modélisation statique** permettant de définir et d'assembler les différents éléments de la zone à modéliser à partir des données disponibles.
- Des **outils de modélisation dynamique**, de préférence inversibles, rendant possible l'intégration des conséquences géométriques des différentes phases de déformations.

Ces différentes ressources conduisent à deux grands types de **modèles** :

- Les **modèles descriptifs** qui utilisent les outils statiques et dynamiques afin :
  - de synthétiser et de visualiser l'ensemble des données disponibles sous une forme facilement exploitable par les géologues
  - de fournir un support aux différentes études du génie civil et d'optimiser l'implantation des ouvrages
  - de caler les modèles de résolutions numériques
- Les **modèles dynamiques** dont la finalité première est une aide à l'interprétation et à la validation des hypothèses émises par les géologues. Ces modèles peuvent aussi servir comme aide à l'enseignement en géologie structurale.

Une fois l'apport de l'informatique graphique et les besoins de la géologie précisés, nous devons nous poser la question du type de modélisation à adopter.

Pour cela, il semble indispensable de mieux définir les différentes données susceptibles d'être utilisées dans un processus de modélisation, ainsi que leurs relations.

## **I.3 - Les données et les objets géologiques**

Nous nous positionnons ici dans le cadre d'une modélisation basée sur des données réelles recueillies par les géologues à partir de différents moyens d'exploration du sol et du sous-sol (observations de terrain, sondages, sismique, etc...).

Nous allons favoriser la géométrie de ces données par rapport à leur signification sémantique. En effet, une zone géologique à étudier peut être considérée comme un volume, dont chaque entité est caractérisée par un certain nombre de caractéristiques. La construction d'un modèle descriptif nécessite dans un premier temps de ne prendre en considération que les composantes géométriques de ces différentes données.

En revanche, nous serons concernés même à ce stade par leurs relations syntaxiques dès lors que plusieurs objets sont présents dans la scène à modéliser [PEST 95].

### **I.3.1 - Les données géologiques**

Le champ couvert par la géologie est tellement large que la liste exhaustive des types et des données qu'elle utilise peut s'avérer longue et fastidieuse. Nous bornerons notre exposé à ceux qui paraissent tout à fait indispensables dans le cadre d'une modélisation géométrique d'un ensemble géologique.

Une des premières caractéristiques des données géologiques est liée à leur mode d'acquisition. Comme il s'agit en général de "données de terrain", leur acquisition est généralement longue et coûteuse, et elle dépend fortement des conditions d'observation et de l'expérience du géologue. Celui-ci ne pourra lever que ce qui est directement accessible et exempt de tout masque (végétation, dépôts quaternaires, etc...).

D'autre part, plus la structure à étudier est de grande taille et plus les informations obtenues seront généralement parcellaires. Ces informations seront éventuellement complétées par des données de sondages, des données géophysiques, des études de photos aériennes, etc..., qui sont elles aussi très coûteuses à obtenir.

La quantité et la densité des données sont très variables. Pour certaines études, et quand les conditions de prospection sont favorables, les données peuvent être recueillies en grand nombre. Il s'agira alors de les classer et d'en tirer le meilleur profit.

Souvent, les conditions d'affleurement et les moyens financiers n'étant pas réunis, les données sont trop peu nombreuses pour être directement injectées dans un système de visualisation. Le géologue est alors réduit à faire des hypothèses et à compléter les données existantes par interpolation et/ou extrapolation en utilisant son expérience et ses connaissances de la géologie régionale. Bien que ceci fasse partie du travail normal d'un géologue, il est rendu ici beaucoup plus difficile et incertain.

Toutes les données recueillies se présentent sous des formats très variables. On peut globalement les réunir en trois grandes catégories :

- les formats de type vectoriel (points, lignes, contours, ...),
- les formats de type "image" (photos aériennes, profils sismiques, ...),
- et les données qui sont sous des formes déjà structurées (par exemple les Modèles Numériques de Terrain (MNT) définis en général par un ensemble de facettes triangulaires).

Un inventaire sommaire des différents types vectoriels est présenté ci-dessous. Ils sont classés dans l'ordre croissant du volume d'informations dont ils disposent.

- Points : Ils représentent des points de l'espace dont l'appartenance (ou la non-appartenance) à un objet est connue. Ils peuvent être à l'intérieur, à l'extérieur ou sur la frontière d'un objet. Dans ce dernier cas, les points peuvent avoir plus d'une appartenance à un objet.
- Segments : Ce sont des suites linéaires de points situés à l'interface entre deux objets. Ils approximent une portion du contour de l'objet, une portion de faille, etc...
- Points ou segments avec pendages : Ils représentent soit des segments, soit des points situés sur la frontière entre deux objets, dont le plan tangent à la surface de l'objet est connu.
- Sondages : Ce sont des suites de segments. Chacun de ces segments appartient intégralement à un objet différent.
- Contours : Ils matérialisent par une suite de segments la frontière entre deux objets dont on peut connaître localement le pendage de la surface limite (failles, chevauchements, limites de formations géologiques). Ces contours peuvent être situés sur des plans de coupe, sur une surface topographique, ou sur une surface de projection. Ce sont généralement des structures 2D.
- Des coupes : Ce sont des visualisations de structures géologiques le long d'un plan qui décrit un ou plusieurs objets avec les types de données énumérés ci-dessus.

Les surfaces et les volumes sont rarement disponibles directement et ne sont pas considérés comme des données. Ils constituent plutôt le but de la modélisation.

Dans le domaine de la géologie de l'ingénieur, il faut rajouter à cette liste les structures qui sont issues d'aménagements ou d'exploitations (comme les remblais, les excavations, les galeries, les tunnels, les ponts, etc...) et qui s'apparentent plus aux objets classiquement utilisés en Conception Assistée par Ordinateur (CAO).

L'ensemble de ces données a pour vocation de définir les différents objets géologiques à modéliser. Avant d'aborder les méthodes de construction, il convient de préciser les caractéristiques de ces objets.

### **I.3.2 - Les objets géologiques et leur syntaxe**

Cette section est destinée à montrer les caractéristiques générales des corps géologiques et les différentes relations qui s'exercent entre eux. Nous ne retiendrons bien évidemment que les caractères qui peuvent avoir une importance majeure dans la traduction informatique d'une scène géologique.

#### **• Les volumes**

En principe une scène géologique ne comporte pas de vide. Par le biais des phénomènes de dépôt et de compaction tous les volumes sont jointifs. Dans les rares exceptions (cargneules, vides karstiques, fissures ouvertes, galeries de mines, ...), les vides peuvent être modélisés comme des volumes à part entière. La modélisation géologique sera donc par essence une représentation volumique puisque les formes à modéliser sont des objets qui sont pleins de matière.

La plupart des modèles qui vont servir de support à des calculs hydrauliques ou mécaniques devront être des assemblages finis de volumes élémentaires. La taille de chaque entité et le type des informations qui lui sont liées dépendront de l'échelle et du problème à résoudre. Ainsi on attribue à tout point du modèle une appartenance à une formation déterminée ou à une frontière entre deux objets, et éventuellement des caractéristiques physiques et chimiques. Parmi l'ensemble des caractéristiques de chaque unité de volume citons :

- des caractéristiques purement géologiques (appartenance à une formation, âge, etc...),
- des caractéristiques pétrophysiques (porosité, conductivité, caractéristiques mécaniques, etc...),
- des caractéristiques pétrologiques et géochimiques (composition minéralogique, composition chimique, etc...)
- des caractéristiques géométriques comme la position, l'orientation, etc....



Ce découpage du volume de la scène correspond à un besoin lié à l'utilisation qui est faite du modèle en aval de sa création. Il s'agit de tous les problèmes liés aux maillages des volumes. Le choix d'un type de maillage, régulier ou adaptatif, cubique, tétraédrique ou hexaédrique, dépendra de la complexité du modèle, de son étendue spatiale, et des contraintes liées aux modes et aux procédures de calculs.

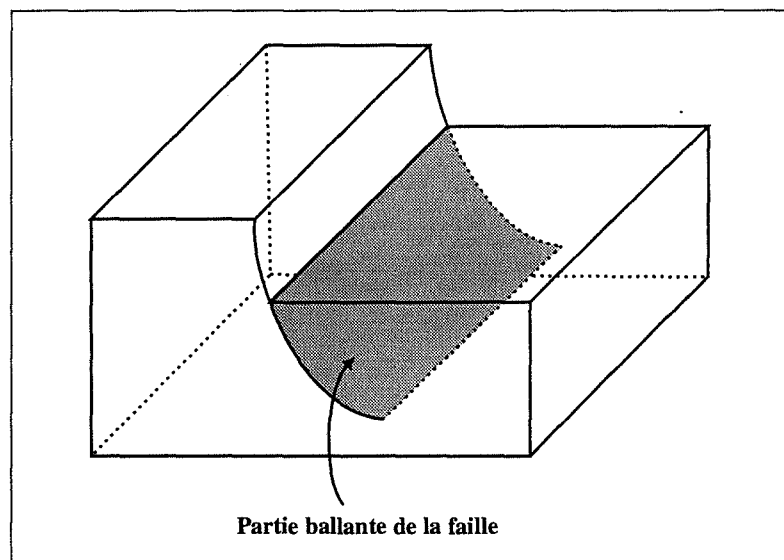
Il existe un autre type de découpage qui est cette fois lié à la structure géologique de la scène, et qui va permettre de contrôler durant la création du modèle sa validité géologique. Comme chaque volume est séparé de ces voisins par des surfaces, ce sont elles qui vont servir à réaliser ce découpage. Nous verrons qu'elles ne jouent pas toutes le même rôle, et que leur agencement dépendra largement de règles qui sont purement géologiques.

Les volumes ainsi délimités correspondront à des blocs élémentaires uniformes d'un point de vue géologique (même formation et même âge relatif).

#### • *Les surfaces*

Les volumes sont séparés par des surfaces. Ce sont soit des surfaces fermées, dans le cas d'un intrusif ou d'un biseau par exemple, soit des surfaces ouvertes dans le cas où les limites du modèle tronquent une partie de l'objet, ou dans le cas de certains contacts anormaux.

Il est à noter que dans certains cas, les objets géologiques ne sont pas des solides Eulériens tels qu'on les définit en informatique. Du fait des phénomènes "d'amortissement" des failles, les volumes peuvent comporter des portions de surfaces ballantes (cf. fig. I.6).



**Figure I.6 :** Les solides en géologie ne sont pas tous Eulériens. Le bloc ci-dessus présente une partie de faille "ballante", ce qui ne correspond pas à un solide couramment manipulé en modélisation solide.

De formes souvent très complexes, les surfaces géologiques ne peuvent pas être strictement définies par des fonctions mathématiques, du moins si l'on considère la totalité de la surface. On peut en revanche les approximer par morceaux.

Les surfaces ont un rôle prépondérant en géologie. C'est au travers d'elles que les différentes composantes d'une scène ainsi que leurs âges respectifs peuvent être appréhendés.

Ainsi un volume en soi ne peut être appréhendé directement. C'est par la connaissance des limites avec les volumes voisins (donc grâce à sa surface) que l'on peut définir son étendue spatiale.

D'autre part, ce sont les surfaces qui correspondent à un changement plus ou moins brutal de l'âge des objets, alors que l'âge des points d'un même volume évolue plus régulièrement. Les volumes sont donc datés en fonction de leurs surfaces limites. En revanche, l'âge relatif d'une surface est défini directement en fonction de sa position stratigraphique au sens large du terme (en fonction des événements qui l'encadrent). Il s'agira dans la grande majorité des cas d'une surface isochrone.

De ce fait, en géologie structurale et donc en modélisation géologique, on s'intéressera plus souvent à la limite de deux formations, plutôt qu'aux formations elles-mêmes.

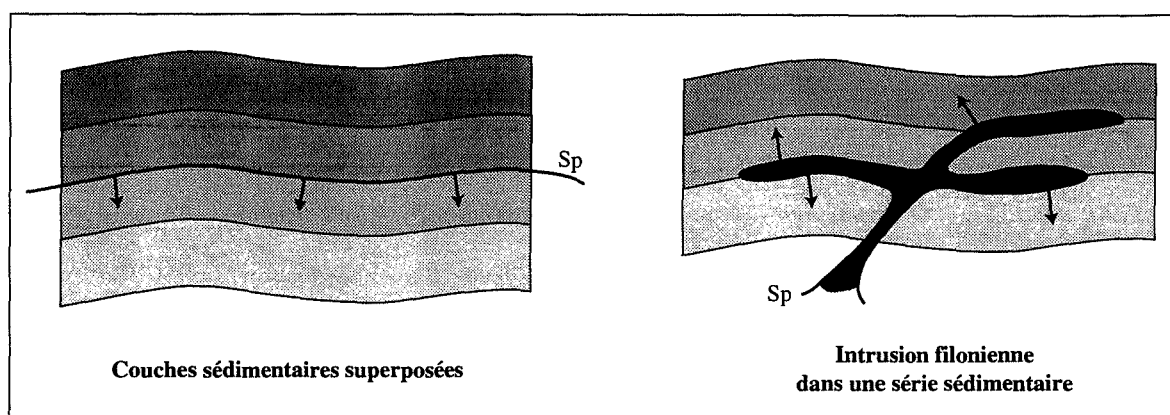
Ceci, et ce que nous avons dit à propos des volumes, impliquent qu'un modèle géologique doit être à la fois volumique et surfacique.

#### • *L'assemblage des surfaces*

Si nous considérons que les surfaces peuvent permettre de définir les volumes, il faut nous intéresser à leur assemblage. Outre l'aspect informatique qui n'est en rien négligeable, il est nécessaire d'affiner les propriétés géologiques des surfaces.

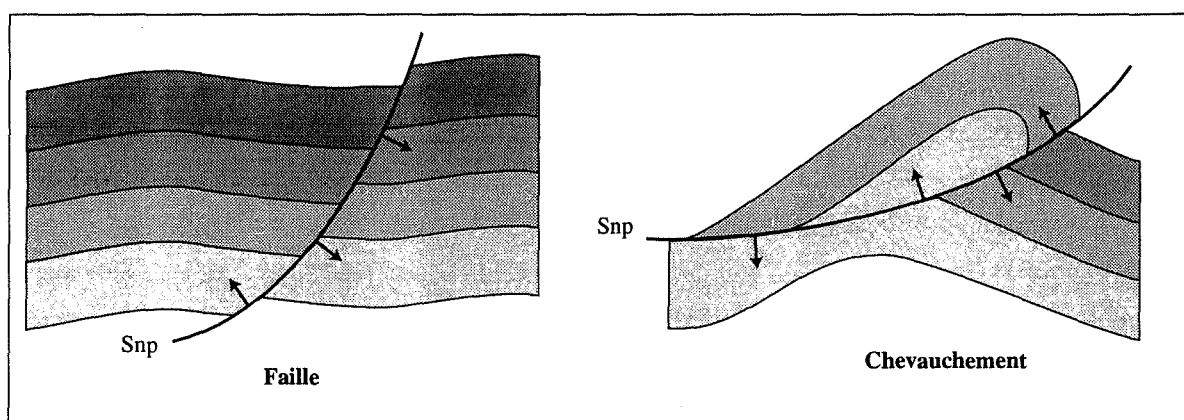
Les surfaces peuvent géologiquement induire des contacts normaux (superposition de deux couches géologiques) et des contacts anormaux (failles mettant en contact deux formations qui peuvent être différentes, chevauchements, etc...). Ces derniers représentent l'interface de deux ensembles qui ne sont généralement pas contigus dans la stratigraphie, mais qui se retrouvent côte à côte par le jeu d'une déformation, un charriage par exemple.

Dans le cas de contacts dits normaux, les surfaces sont en général polarisées. C'est-à-dire qu'elles séparent deux volumes dont l'un est plus récent que la surface elle-même, alors que l'autre est plus ancien. La figure I.7 illustre le cas de deux couches géologiques superposées normalement, et celui de l'intrusion d'un filon dans une série de couches sédimentaires plus ancienne.



**Figure I.7 :** Exemple de surfaces polarisées. Les flèches pointent vers le volume le plus ancien.

Les contacts anormaux impliquent à l'inverse des surfaces non polarisées (cf. fig. I.8). C'est le cas d'une faille qui recoupe un terrain. L'âge relatif de la faille est donc, par définition, plus récent que le terrain lui-même.

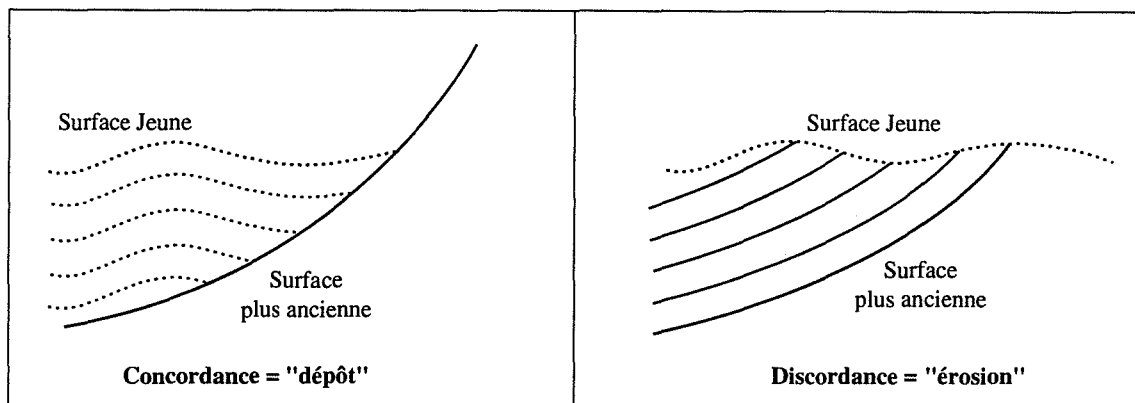


**Figure I.8 :** Exemple de surfaces non polarisées. Les flèches pointent vers le volume le plus ancien. Dans ce cas, chaque côté de la surface est tournée vers un volume dont l'âge est plus ancien.

Lorsque deux surfaces s'intersectent, il peut exister une ambiguïté d'un point de vue informatique sur le devenir de chacune des surfaces. Cette ambiguïté est levée par la prise en compte des notions de concordance et de discordance entre les surfaces. Notons que ces notions ont ici un sens beaucoup plus large que celui généralement admis en géologie.

Ces notions, illustrées par la figure I.9, se définissent comme suit :

- Concordance : Une surface jeune vient buter sur une autre surface plus âgée.
- Discordance : Une surface jeune recoupe une autre surface plus âgée.

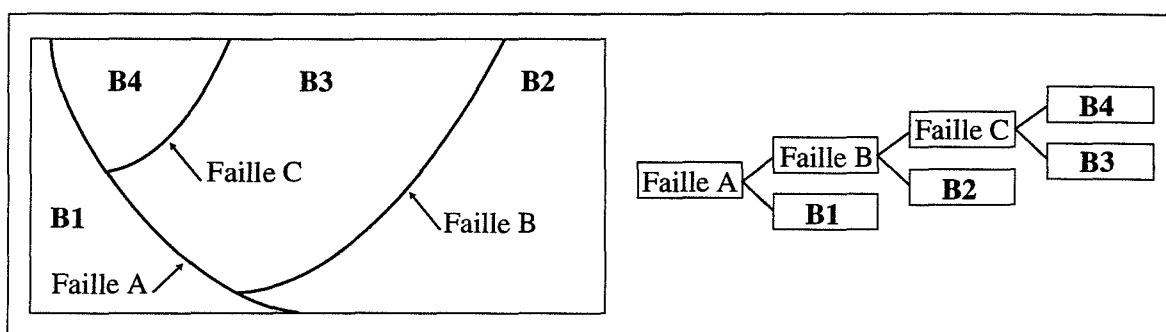


**Figure I.9 :** Notion de concordance et de discordance.

Ces notions respectives appliquées à des volumes correspondent intuitivement à un dépôt et à une érosion.

Notons que la notion d'intersection classiquement utilisée en informatique ne peut exister à grande échelle en géologie. En effet, les mécanismes de fracturation, dûs à une compression ou à une extension, sont le plus souvent accompagnés d'un déplacement de l'un des deux compartiments causé par le mécanisme de cisaillement (le "rejet" en géologie). Deux surfaces qui partagent un point commun obéiront donc toujours à ces deux notions de concordance et de discordance. Ceci est vrai à partir d'une certaine échelle.

On voit ainsi que les surfaces vont avoir un rôle clé dans la modélisation géologique car une vraie syntaxe géologique peut être basée sur elles plutôt que sur les volumes. Ce sont les surfaces qui vont diviser la scène géologique en zones homogènes. Une analogie avec les arbres binaires peut expliquer ce procédé. Un arbre représentant la scène géologique peut être construit en définissant les nœuds de l'arbre par les contacts anormaux, les feuilles correspondant aux volumes où la stratigraphie normale est respectée. Les contacts anormaux sont insérés dans l'arbre du plus récent au plus vieux. La figure I.10 donne un exemple simplifié de cette structuration de l'espace.



**Figure I.10 :** Structuration d'un volume en fonction des différentes surfaces.  
Les volumes élémentaires B1, ..., B4 sont issus de la division du volume par les surfaces A, ..., D.

La construction de surfaces à partir de leurs traces dans des coupes géologiques peut relever du même procédé. La même décomposition entre contacts anormaux et contacts normaux peut être opérée. Les traces d'une même surface sont alors extraites sur l'ensemble des coupes et envoyées à un système de reconstruction de surface qui produira la surface entière. Toutes les surfaces sont ainsi construites séparément et sont assemblées par la suite.

L'assemblage des différentes surfaces devra donc d'abord s'appuyer sur leurs relations géologiques avant d'aborder les problèmes géométriques et topologiques liés à la construction informatique des volumes. Remarquons que nous prenons le parti de définir les volumes à partir des surfaces. Les données géologiques étant souvent hétérogènes, ce n'est pas la voie à adopter dans tous les cas de figures. En particulier la création d'une surface fermée, qui délimite donc un volume, peut s'effectuer directement à partir de points définis dans l'espace. Ce point est abordé dans le paragraphe I.5 de ce chapitre.

Tout ce qui vient d'être dit n'est pas une condition suffisante pour obtenir un modèle théoriquement exact du point de vue géologique. En revanche, c'est une condition nécessaire pour définir un modèle "géologiquement" valide et cohérent.

Il est ensuite du ressort du géologue de valider ou non le modèle en fonction de critères purement géologiques.

## I.4 - Types de modélisation à adopter

### I.4.1 - Les approches classiques de modélisation

Il est clair qu'il n'existe pas actuellement dans le domaine de la modélisation solide des outils qui permettent de modéliser dynamiquement une scène géologique. Il n'est par exemple pas possible d'introduire dans les systèmes de modélisation existants des phases de plissement, en définissant le plan axial, la direction de l'axe du pli, son pendage, etc...

Mis à part les logiciels LOCACE et POLYPLI, et les approches citées plus haut, tout dans ce domaine reste donc à faire<sup>7</sup>. En particulier il est nécessaire de définir un certain nombre d'outils qui permettent de modéliser l'ensemble des processus et des déformations les plus couramment rencontrés, comme les plis isopaques et les plis semblables, les failles normales et inverses, les surfaces de chevauchement, les mécanismes d'intrusion, d'érosion, etc...

Concernant la modélisation statique, les avis sont moins tranchés. En effet, il existe de nombreux modeleurs qui permettent de définir des modèles 3D à partir de données réelles ou dans un but de création pure. Ces systèmes de modélisation sont basés sur différentes méthodes de construction dont nous donnons ici un rapide aperçu. De nombreux auteurs se sont intéressés à ces différents modes de construction, et une large bibliographie, dont nous ne donnons que les ouvrages de base, est disponible sur ces sujets [HOFF 89], [MORT 85], [MANT 88], [PEAR 88]. Les types principaux de modélisation sont :

- Les modèles par arbres de construction (CSG : Constructive Solid Geometry) représentent les solides par des arbres binaires dont les feuilles sont des primitives de base (cylindres, cubes, ...), et où les nœuds sont des opérateurs de composition entre ces différentes primitives. Un objet est alors construit par un parcours complet de l'arbre. Il est donc défini de manière implicite.

- Les modèles d'énumération spatiale divisent de façon récursive le volume de la scène à modéliser en éléments unitaires de volume (les voxels). Un objet est donc représenté par un ensemble de ces entités volumiques. La place mémoire pour stocker l'objet est très grande, ce qui conduit souvent à utiliser l'approche de l'arbre octal (octree). Un volume n'est alors subdivisé que s'il n'appartient pas en totalité à l'objet.

Les modèles de grilles régulières 3D peuvent être inclus dans cette catégorie.

---

<sup>7</sup> Du fait de l'essor rapide de la modélisation géologique 3D, nous ne pouvons pas prétendre être au courant de tous les développements réalisés dans ce domaine à travers le monde...

C'est le seul type de méthodes qui permette réellement de manipuler directement les points d'un volume donné.

- Les partitions binaires de l'espace (BSP, Binary Space Partition) utilisent des arbres dont les nœuds sont des plans. Ces plans divisent l'espace en deux parties situées respectivement à droite et à gauche du plan. Du fait de leur structure, ils permettent des localisations dichotomiques très rapides [CHEA 93], [CHSL 92], [GOCH 91].

Ces trois types d'approches gèrent très mal, voire pas du tout, la continuité surfacique des objets, ainsi que les relations entre les surfaces.

- Les modèles de représentation par frontières (BRep : Binary Representation) décrivent les différents objets par leurs faces, qui sont elles-mêmes définies par leurs sommets et par leurs arêtes. Cette approche donne donc un rôle important à la notion de surface.

- Les modèles par construction interactive se rapprochent des BRep. Ils mettent à la disposition des utilisateurs des primitives de différents types (surfaces de formes libres, volumes divers, opérateurs), qui sont combinées et déformées jusqu'à aboutir à la forme désirée. Ils sont très utilisés dans les travaux où la création pure est valorisée [FARI 93], [LACO 93].

Comme pratiquement aucune de ces méthodes ne peut être utilisée vraiment efficacement pour des applications très spécifiques, de nombreux auteurs ont développé des approches mixtes qui combinent les avantages des différentes méthodes, et parfois aussi certains de leurs inconvénients.

#### **I.4.2 - Le besoin d'une modélisation spécifique**

Un système de modélisation géologique 3D que l'on souhaite "optimal" doit pouvoir prendre en compte les exigences suivantes :

- Les objets et les structures géologiques sont, comme d'autres objets naturels (un organe, un végétal, un nuage, une étendue d'eau, ...), d'une diversité, d'une nature et d'une complexité différentes de celles des objets habituellement conçus dans le cadre de la CAO. En particulier les différentes surfaces ne peuvent pas être globalement approchées par des fonctions mathématiques.

- La modélisation géologique s'appuie sur des données réelles, qui sont souvent ponctuelles, discontinues et de formats hétérogènes. Les phases d'interpolation et de modélisation doivent respecter les données et leurs degrés de précision. C'est donc une approche totalement différente de celles qui sont utilisées dans les domaines où la création pure est à la base de la construction d'objets ou de scènes. D'autre part, l'ordre de grandeur de la taille de ces données est variable puisqu'il s'échelonne du centimètre (échantillon) au kilomètre (structure régionale). La représentation doit alors s'adapter à ces variations d'échelle. En effet, un changement de l'échelle d'observation permet bien souvent de mieux comprendre les relations entre les objets ainsi que les différents mécanismes. Ainsi l'importance d'une faille majeure ne peut être perçue que par l'observation de ses relations spatiales au niveau régional.

- Les corps géologiques entretiennent entre eux des relations géométriques qui ne sont pas quelconques, mais qui obéissent à une syntaxe et à des lois précises dont il faut tenir compte et qui permettront d'exploiter de manière efficace les différents modèles. Cette syntaxe est elle-même déduite de la stratigraphie. La modélisation géologique doit bien évidemment garantir la validité géométrique de la scène, mais aussi sa validité géologique en interdisant les incohérences.

- Un "bon" système de modélisation devrait pouvoir intégrer au processus de modélisation "statique" une approche et des opérateurs de modélisation "dynamique". Cette approche mixte qui prend en compte les processus génétiques, ou du moins leurs effets géométriques, permet d'étendre les possibilités du système dans le domaine de la construction et de la mise au point du modèle.

L'approche de la modélisation géodynamique fournit le cadre d'une aide à l'interprétation et à la validation des hypothèses structurales.

- Un tel modèle doit pouvoir être visualisé de manière conviviale et sélective. Le système de modélisation doit en outre permettre des modifications locales ou globales du modèle, ainsi que des ajouts ou des suppressions de données qui ne pénalisent pas fortement son utilisation.

- Un rendu optimal des surfaces et des volumes géologiques doit tenir compte de leurs textures mais aussi de leurs caractéristiques géologiques (orientation de la stratification, des schistosités, ...). Ces habillages ne sont pas seulement dictés par des critères esthétiques, mais permettent de "sentir" et de comprendre visuellement les phénomènes.

- Enfin, la modélisation géologique 3D doit être, compte tenu de la nature des données et des besoins recherchés, à la fois volumique et surfacique. Du fait de l'importance de la



notion de surface, il faut choisir une méthode de construction du modèle qui soit d'abord surfacique et qui permette le passage au volumique. Un tel système de modélisation doit pouvoir aussi utiliser directement les données 3D pour construire les surfaces limites des volumes à modéliser.

Il est clair à la vue de ces exigences qu'une telle modélisation géologique ne peut se concevoir de la même façon que les approches couramment utilisées en modélisation solide. Si la plupart des méthodes classiques permettent de définir des surfaces et des volumes, l'ensemble des autres critères n'est pas satisfait.

Il faut donc définir un système complet permettant d'intégrer la majorité des exigences demandées.

Bien que ce domaine et ces préoccupations soient très récentes, le terrain n'est pas vierge pour autant. Il existe des logiciels complets et des outils plus ou moins évolués qui permettent de répondre à certaines questions. Le paragraphe suivant se propose d'en faire un survol rapide.

## **I.5 - Regards sur les modélisations géologiques descriptives existantes**

Parmi les besoins de la modélisation géologique (cf. § I.4.2) seuls trois aspects sont réellement pris en compte actuellement. Il s'agit de la création des surfaces, des problèmes de représentation volumique, et des méthodes de visualisation de la scène.

En raison de nos préoccupations, nous ne détaillerons que la création de surfaces, et nous ferons référence pour cela à trois systèmes de modélisation géologique qui traitent cet aspect. Il s'agit de EarthVision [MAYO 93], de Gocad et de son interpolateur DSI [MALL 89], et de Geo3View [PFKL 92].

En revanche, la gestion des données discontinues et hétérogènes, les relations géologiques entre les objets, et les notions de texture géologique 3D n'ont encore été envisagées dans aucun des systèmes actuels de modélisation. Les problèmes posés par l'interpolation de données hétérogènes seront rapidement abordés dans la dernière partie de ce paragraphe.

Les méthodes de création de surfaces dépendent essentiellement du type de données dont on dispose, et de la connaissance que l'on possède sur ces données.

Les données sont généralement de deux types :

- Des **points** qui appartiennent à la frontière et éventuellement aussi à l'intérieur de l'objet. C'est le cas des données de sondages, ou des estimations de teneurs issues de méthodes comme le Krigeage.
- Des **contours** ouverts ou fermés disposés sur des coupes. Les exemples les plus courants sont les contours de formations sur des coupes géologiques, les coupes de gisements miniers, et les courbes de niveau sur les cartes topographiques.

La différence fondamentale entre ces deux types de données est la charge d'informations qu'ils possèdent. La notion de contour sous-entend une connaissance locale de la topologie de l'objet au sein d'une même coupe. Le choix d'une orientation des contours externes et des trous (cf. fig II.1 du § II.2.1) impose la notion d'intérieur et d'extérieur à l'objet.

Dans le cas de points isolés appartenant à la frontière de l'objet (et éventuellement à l'intérieur), il n'est pas possible d'obtenir directement cette information. D'autre part, la seule donnée de N points répartis dans l'espace implique par essence une ambiguïté sur la forme de la surface limite. Il n'est pas possible d'obtenir une surface unique. Les méthodes de résolution devront donc faire un minimum d'hypothèses sur la connexité des surfaces à reconstruire, et sur leurs formes générales.

Ceci est aussi en partie vrai dans le cas de coupes, mais le nombre de solutions différentes de connexions est plus limité.

Une construction à partir de coupes sera donc a priori de meilleure "qualité" puisque les informations dont elle dispose sont mieux structurées.

#### • Construction à partir de points isolés

Il existe globalement deux grandes classes de méthodes qui résolvent ce type de problèmes. Les approches utilisant des grilles 3D, régulières ou adaptatives, et celles qui se basent sur des graphes de proximité, comme la triangulation de Delaunay 3D.

Le premier type d'approche est utilisé par le logiciel EarthVision, et est le fondement de l'interpolateur DSI de Gocad. Dans les deux cas il s'agit de méthodes basées sur des grilles régulières 3D.

Dans une première phase, la valeur de chacun des nœuds de la grille est évaluée en fonction de la position des points voisins originaux par une interpolation qui peut être non linéaire. La taille de la grille doit être définie au préalable, si possible en fonction de la densité des données.

La deuxième étape consiste à définir une surface triangulée passant par les nœuds du maillage. Ceci est réalisé en fonction de critère de courbure et en définissant l'étendue du voisinage à prendre en compte pour chacun des points.

Les méthodes ajoutent un stade supplémentaire qui permet le lissage de la surface polyédrique extraite de la grille.

Essentiellement à cause du format des données, les méthodes basées sur les grilles 3D ne peuvent pas vraiment maîtriser la topologie de l'objet. En revanche, ces méthodes permettent de définir simplement des discontinuités en "supprimant" le lien entre des nœuds voisins. Ceci empêche toute interpolation entre les points situés de part et d'autre de la faille. Néanmoins, du fait que les points sont nécessairement sur des nœuds de la grille, des problèmes d'imprécision peuvent apparaître au niveau des jonctions entre les failles et les autres surfaces, ce qui nuit localement à la cohérence topologique du modèle.

Récemment Neveu et al. [NEFA 90, 94] ont proposé une méthode utilisant un maillage adaptatif. Les auteurs déforment une surface initiale à l'aide de fonction de type B-spline jusqu'à intégrer l'ensemble des points initiaux. Si le choix de la surface initiale est correct, le modèle semble converger assez rapidement vers une solution. Comme dans l'ensemble des méthodes utilisant la notion de contours actifs, le résultat est très dépendant de la forme et de la position de la courbe ou de la surface initiale, ainsi que du choix des différents paramètres. Cet ajustement n'est pas toujours trivial à réaliser.

Le principe des méthodes basées sur les graphes de proximité est tout autre. Il s'agit dans une première étape de déterminer une triangulation 3D de l'ensemble des points initiaux, qui sont tous situés sur la surface de l'objet. Boissonnat [BOIS 85] utilise la triangulation 3D de Delaunay, Weltkamp [WELT 93] définit le  $\gamma$ -graphe, qui est basiquement une triangulation de Delaunay 3D. L'ensemble des points est alors connecté par un ensemble de tétraèdres. La surface initiale correspond à l'enveloppe convexe de l'ensemble des points, et elle est constituée par les faces externes<sup>8</sup> de la triangulation.

La seconde phase nécessite la suppression itérative d'un ensemble de triangles afin que tous les points soient des sommets d'un triangle externe. A une itération  $k$ , seuls les triangles externes peuvent être éliminés de la triangulation.

A la fin de la procédure tous les points sont situés sur la surface de l'objet.

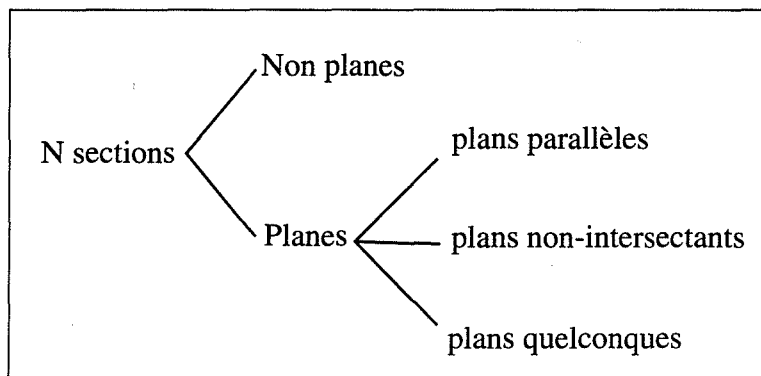
Cette approche, ainsi que celle de Neveu et al., ne permettent d'extraire que des surfaces d'un seul tenant.

---

<sup>8</sup> Un triangle externe n'appartient qu'à un seul tétraèdre.

### • Construction à partir de contours situés sur des coupes

A ce stade, on doit opérer une distinction entre les différents types de coupes. Elles sont résumées par le schéma suivant :

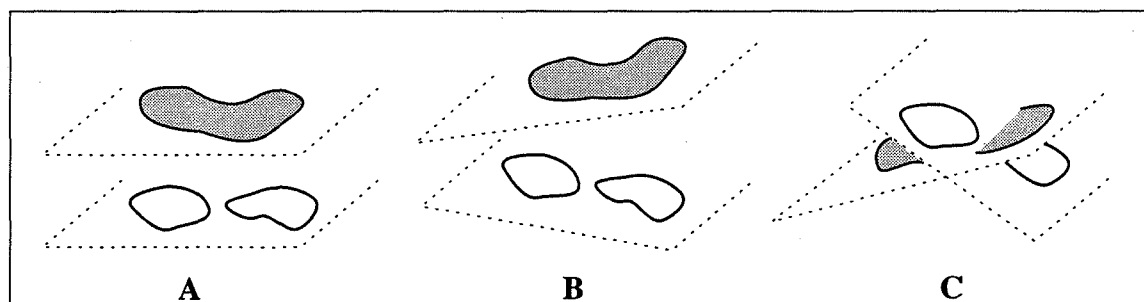


#### • Sections non planes

Quand les sections ne sont pas planes, mais que les points ne sont pas non plus disposés de manière quelconque, la méthode la plus simple consiste à se ramener, par projection de tous les points, à une section plane [DOLL 94]. Dans le cas contraire, et pour éviter de trop grandes distorsions, l'utilisation des méthodes décrites ci-dessus est préférable.

#### • Sections planes

Dans le cas de sections planes les trois configurations illustrées par la figure I.11 sont envisageables.



**Figure I.11 :** Les trois configurations des plans contenant des contours à reconstruire : plans parallèles, plans non parallèles et non intersectants, et enfin les plans quelconques.

Le cas A, où les sections sont sur des plans parallèles, est le plus "simple" à considérer. Il fera l'objet d'une étude approfondie dans le chapitre II. Notons dès maintenant que le problème est différent selon que la trace de la surface sur la coupe est définie par des contours

fermés ou par des courbes<sup>9</sup>. Si l'on considère les courbes comme des données complètes, il s'agit en général de traces de structures qui sont bien connues, comme des surfaces de formations plissées directement observables par le géologue. Dans le cas de contours fermés, il s'agit en général de données "profondes", comme des contours de gisements, des intrusifs, etc...

La connaissance a priori du géologue sur les structures ne sera pas la même dans les deux cas. Cela implique une méthodologie différente. Une méthode de mise en correspondance classique, et entièrement automatique, peut être utilisée si le géologue n'a que peu d'informations sur la structure à reconstruire, ou si la variation entre la morphologie de chaque section de cette structure est faible (cf. Chap. II). En revanche, dans le cas de structures de formes complexes et/ou bien connues, une méthode automatique de recherche de points caractéristiques suivie par une phase de validation visuelle sera préférée du géologue (cf. Chap. V).

Lorsque deux plans A et B ne sont pas parallèles et qu'ils ne s'intersectent pas (cf. fig. I.11B), nous proposons de projeter les contours de chaque section sur un plan intermédiaire I. Le plan I est en fait le plan bissecteur de A et de B. Cette projection permet de déterminer une section intermédiaire sur le plan I, ce qui évite l'apparition d'éventuelles intersections entre les éléments de surfaces lors de la remise en place des contours des coupes A et B dans leur plan respectif. Cette méthode, comparable à celle développée dans le chapitre VI, n'a pas été testée. Le résultat dépend a priori du type de projection effectué et de la différence d'orientation des deux plans. Si les deux plans ont des orientations très différentes, une telle méthode pourra ne pas donner des résultats satisfaisants.

La situation décrite par des sections dans des plans quelconques (cf. fig. I.11C), est sans conteste la plus délicate à gérer. Payto et al. [PATO 94] sont parmi les seuls auteurs qui à notre connaissance posent véritablement ce problème.

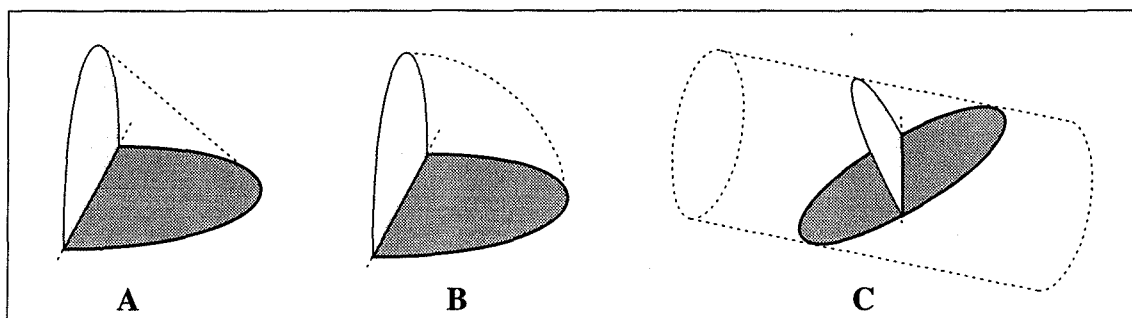
Les auteurs individualisent une série de cellules convexes issues de la division de l'espace par les différents plans de coupes. Ils considèrent qu'il ne peut y avoir, dans chaque cellule, qu'une seule portion de contour par plan. Les auteurs fusionnent alors les portions de contour en un seul contour qu'ils triangulent par la suite en recherchant la surface d'aire minimum.

Cette méthode pose des problèmes quand plusieurs portions de surface sont à construire à l'intérieur d'une même cellule. Les auteurs préconisent alors soit une intervention directe de l'opérateur afin d'opérer les bonnes connexions, soit la réalisation d'autres coupes si cela est nécessaire. Ceci présente bien évidemment un handicap dans beaucoup d'applications.

---

<sup>9</sup> Ce terme est employé ici pour désigner des chaînes polygonales ouvertes.

D'autre part, les auteurs mettent en avant le problème de l'obliquité des arêtes de la triangulation finale. En effet, à la place de la connexion de la figure I.12A, la triangulation pourrait conserver plus ou moins la même courbure que celle des contours initiaux comme l'illustre la figure I.12B. Toutefois, ce qui semble logique pour des objets naturels ne l'est pas forcément pour un objet manufacturé, un cylindre par exemple (cf. fig. I.12C). Cette question dépend à la fois de la forme de l'objet et de l'orientation des plans de coupe. Il est donc difficile d'y répondre de façon automatique.



**Figure I.12 :** Éventuelle obliquité des facettes en relation avec la vraie courbure de l'objet. Seule une connaissance a priori peut permettre de déterminer la "bonne" solution.

Boissonnat et al. [BOCE 91] propose une méthode basée sur la construction de la triangulation de Delaunay (cf. § IV.1.1) à partir de points disposés dans 2 plans quelconques. Comme dans le cas de coupes sériées (cf. fig. II.35) une deuxième phase permettant d'éliminer les triangles non valides conduit à l'obtention de la surface de l'objet.

Nous proposons dans le chapitre VII une autre méthode dérivée de l'approche que nous utilisons dans le cas de sections parallèles (cf. § VII.3.2).

#### • *Traitements actuels*

Seuls Geo3View et EarthVision permettent de définir des surfaces à partir de coupes dans des plans parallèles. Ces deux logiciels peuvent traiter des contours et des courbes, mais les problèmes de branchements ne sont pas gérés.

Dans une première phase, les points caractéristiques sont définis manuellement par l'utilisateur sur chacun des profils. EarthVision impose en plus un nombre constant de ces points sur chaque profil.

Dans le cas de Geo3View, une triangulation inspirée de Christiansen [CHSE 78] est ensuite réalisée entre chaque couple de points caractéristiques. EarthVision réalise d'abord une interpolation entre tous les couples de points, ce qui permet de rajouter un certain nombre de points entre les coupes, et de définir ainsi des profils intermédiaires. Une triangulation est ensuite effectuée entre chaque couple de points caractéristiques de l'ensemble des profils.

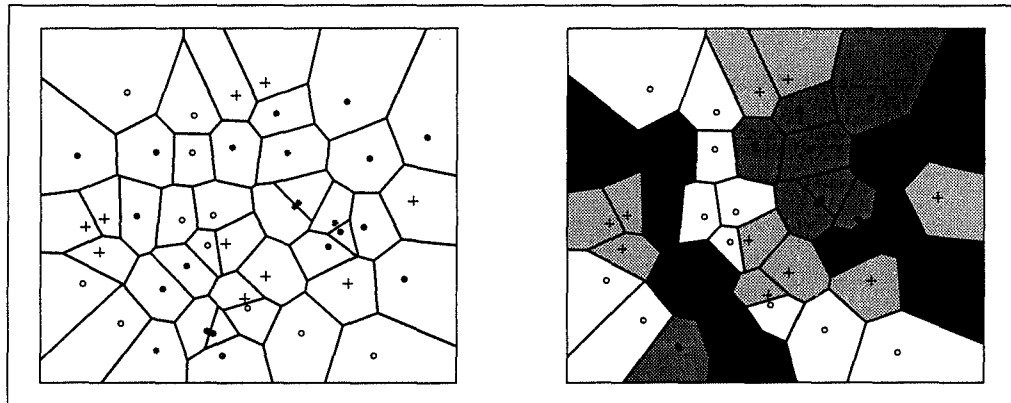
- **Intégration des données hétérogènes et incomplètes**

Le problème de reconstruction d'un objet ou d'une scène géologique à partir de données hétérogènes et/ou incomplètes est aussi vaste que l'étendue des types et de la précision des données disponibles en géologie.

Nous ne donnons ici que quelques exemples qui montrent la variété, et certaines fois la complexité, des différentes procédures d'interpolation nécessaires en géologie. Une des tâches sans doute la plus complexe, est de réaliser la synthèse et la compatibilité de ces différentes procédures dans un même environnement de modélisation.

- 1 : Points matériels appartenant à l'intérieur et à l'extérieur de plusieurs objets :

Toutes les méthodes dérivées des diagrammes de Voronoï 2D et 3D (cf. Chap. IV) peuvent être utilisées. L'ensemble des arêtes séparant deux cellules relatives à deux points de natures différentes fournissent l'interface entre les différents objets (cf. fig. I.13).

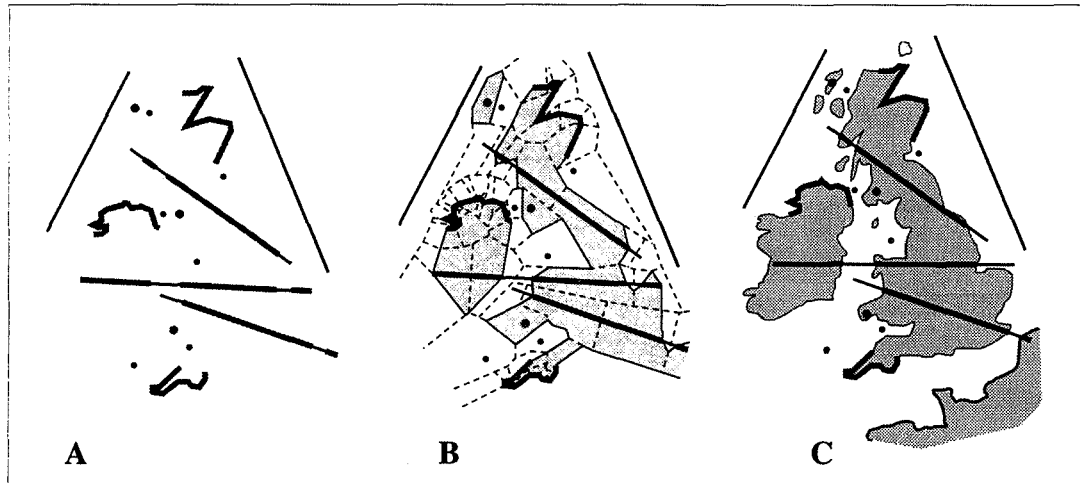


**Figure I.13 :** Exemple d'interpolation à partir de points appartenant à quatre objets différents.  
La figure de gauche montre le diagramme de Voronoï des points qui permet d'extraire les zones relatives à chaque objet (figure de droite).

- 2 : Points avec des portions de contours et sondages :

Ce type de technique peut être appliqué par le biais des méthodes basées sur le diagramme de Voronoï généralisé (cf. Chap. IV) à d'autres types de données. L'interface des différents objets passe à la fois par les données (contours par exemple) et par les arêtes séparant deux éléments qui n'appartiennent pas au même objet (cf. fig. I.14).

Dernièrement, un travail basé sur la discrétisation de l'ensemble des données suivi du calcul du diagramme de Voronoï de l'ensemble des points puis d'une phase de lissage a permis de fournir une solution efficace à ce type de problème [NULL 95].



**Figure I.14 :** Exemple d'interpolation entre des données hétérogènes.

La figure A présente les données disponibles initialement. L'interpolation des données, réalisée par construction d'un diagramme de proximité entre les différents éléments, suivie de l'extraction des portions des cellules ayant une appartenance mixte, est illustrée par la figure B.

Ce résultat est à comparer avec la figure C qui montre les objets réels (terre et mer) sur lesquels sont superposées les données échantillonnées.

L'extension en 3D doit pouvoir être simplifiée par l'utilisation du réseau bissecteur 3D (cf. Chap. IV et § VII.3.3)

• 3 : Reconstruction de plusieurs objets à partir de contours situés dans des coupes :

Les méthodes exposées précédemment se focalisent essentiellement sur la reconstruction d'un seul objet. La construction de plusieurs surfaces à partir de coupes présentant en plus des failles et des données hétérogènes est d'une complexité toute différente. D'autre part, la possibilité de disposer de données situées entre les coupes n'est pas encore prise en compte.

Les solutions actuellement retenues consistent d'abord à rétablir la totalité de chacune des coupes à l'aide de procédures d'interpolation (2), et ensuite à diviser chaque coupe en fonction des différentes surfaces limitant les blocs géologiques 2D élémentaires. La troisième étape nécessite la reconstruction de chacune des surfaces, l'une après l'autre, en tenant compte des effets de bords (fantômes illustrés par [MAYO 93]). Elle est suivie par une phase d'assemblage, avec calcul d'intersection et respect de la syntaxe géologique entre les différentes surfaces, qui fournit le modèle complet.

L'intégration d'éventuelles données entre les coupes peut être réalisée au moment de la construction de chaque surface (prise en compte au niveau de la procédure de reconstruction), ou au moment de la construction du modèle final (contraindre les surfaces à passer par les différentes données supplémentaires, sans doute au moyen de subdivision de l'espace).

Dans cette approche, une mise à jour du modèle nécessite a priori de calculer de nouveau la phase d'assemblage.



Nous avons évoqué rapidement trois cas de figures parmi l'étendue des problèmes d'interpolation posés en géologie. Citons en outre :

- la répercussion à l'intérieur des volumes à modéliser de caractères structuraux qui sont soit liés à la déformation des roches (schistosité, fissuration, ...), soit liés à leurs caractéristiques pétrophysiques. Cela permet de visualiser ces paramètres lors d'une section à l'intérieur du volume.
- la construction d'un réseau de fractures 3D, à partir de données incomplètes.
- la prise en compte des pendages dans les phases de reconstruction. La connaissance du pendage local d'une portion de contour permet de guider localement la pente de la surface de l'objet. La donnée "segment" est alors remplacée par une "petite" portion de plan.

## I.6 - Conclusion

Ce premier chapitre a rapidement exposé les apports de la modélisation géologique 3D et les besoins qu'elle implique. Nous avons montré qu'une telle modélisation n'était réalisable qu'en utilisant une méthodologie et souvent des outils propres à la géologie.

En résumé nous rappellerons les principales **ressources** qui sont nécessaires pour définir ce que nous avons nommé par **modèles descriptifs** et **modèles géodynamiques** :

- une base de données géologiques 2D et 3D normalisée,
- des outils d'interpolation et de modélisation statiques,
- des outils d'interpolation et de modélisation dynamiques,
- un schéma d'assemblage qui s'appuie sur la syntaxe et sur les relations géologiques des différents éléments à modéliser.

Il faut donc disposer d'un large éventail d'outils permettant de répondre intelligemment et efficacement à l'ensemble des cas de figure qui sont susceptibles d'être rencontrés, interpolations diverses en 2D, interpolations directes 3D, reconstruction à partir de coupes parallèles ou quelconques, ajout et modification de données, etc...

Le travail que nous exposerons dans les prochains chapitres, qui se focalise sur la reconstruction à partir de contours connus dans des plans parallèles, se veut être une contribution à cet objectif.



## **- CHAPITRE II -**

# **Les méthodes de reconstruction 3D à partir de coupes 2D**

La définition d'un objet tridimensionnel à partir d'un nombre réduit de données est un problème qui se pose dans de nombreux domaines. Une des méthodes couramment utilisée est la reconstruction tridimensionnelle à partir de coupes sériées.

Ce chapitre se propose de dégager les différents types de problèmes posés par cette approche, et d'examiner les solutions apportées par les auteurs à l'ensemble des questions posées.

## **II.1 - Importance de la reconstruction 3D à partir de coupes géologiques**

La démarche classique d'un géologue pour visualiser en 3D la scène géologique par le biais d'un bloc-diagramme est de s'appuyer sur des coupes géologiques. Ceci semble être une démarche naturelle qui, de plus, est souvent dictée par le type de données disponibles. Le bloc diagramme donne une vue d'ensemble des structures, tandis que les coupes permettent de visualiser une partie de l'intérieur du volume.

A ce stade, l'utilisation des outils informatiques peut permettre d'établir directement à partir de données 3D un modèle volumique sans passer par l'établissement des coupes géologiques (cf. § 1.5.1). Ce procédé qui peut être utilisé quand le volume de données ponctuelles est très grand, lors de campagnes de sondages par exemple, se justifie moins lors d'approches classiques, où les coupes géologiques fournies par le géologue sont d'ores et déjà disponibles.

En outre, le fait d'utiliser des coupes pour reconstruire une scène géologique, ce qui est une approche naturelle en géologie, permet au géologue d'utiliser les outils auxquels sa culture l'a habitué et de rester critique sur le bien fondé de chacun des stades de la modélisation.

Un des volets importants du processus de modélisation s'attachera donc à définir par le biais d'outils d'interpolation 2D, un ensemble de coupes qui seront utilisées pour reconstruire l'objet. Notons que nous supposons ici que l'ensemble des contours se rapporte au même objet. Les problèmes de classification et d'extraction des contours de l'objet sur les différentes

coupes sont supposés résolus à ce stade (cf. § I.3.2). Par ailleurs toutes les coupes sont supposées complètes.

## II.2 - Problématique d'ensemble

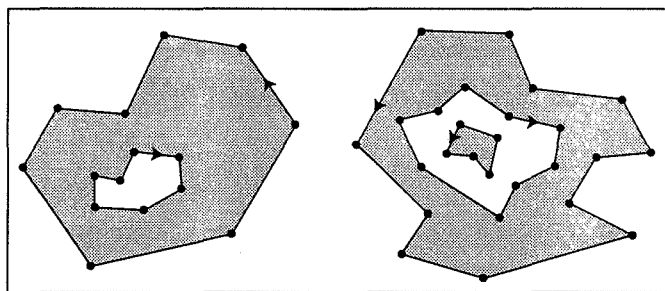
Il existe dans la littérature un nombre important de travaux qui s'intéressent à la reconstruction d'objets à partir de sections planes et parallèles. Pourtant les problèmes traités sont variés : ils dépendent des données, du nombre d'objets à reconstruire, et de l'utilisation qui est faite des objets une fois reconstruits.

Pour clarifier notre propos, nous allons dans un premier temps nous intéresser aux différents types de données susceptibles d'être utilisées par un système de reconstruction 3D. Nous verrons par la suite les principales difficultés auxquelles se heurte toute méthode de reconstruction 3D.

### II.2.1 - Les différents formats de données

La phase d'acquisition des données tridimensionnelles initiales diffère très fortement en fonction de l'application. Ce sont généralement ces méthodes d'acquisition qui dictent le format des données. Il existe principalement deux grands types de format de données, qui sont le format "vectoriel" et le format "image".

- Le premier décrit les contours des sections initiales par une suite d'arêtes dont on connaît les trois coordonnées, X, Y, Z, de chacun des points extrémités. Sur chacune des coupes, l'intérieur de l'objet peut être strictement défini en adoptant des conventions sur le sens de parcours des contours de la section.



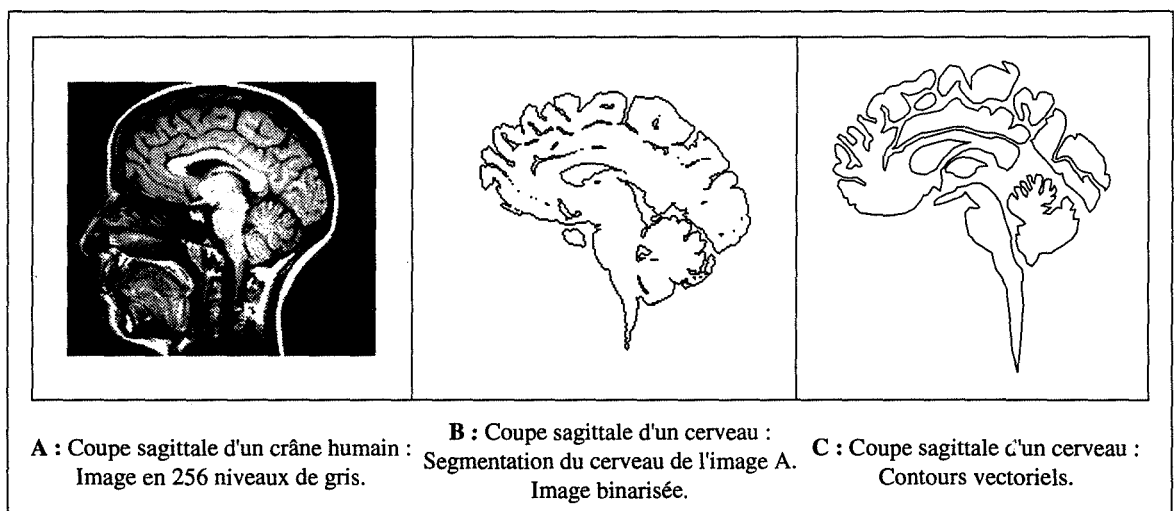
**Figure II.1 :** Orientation de contours vectoriels induisant l'intérieur et l'extérieur de l'objet.

Par exemple, si les contours extérieurs sont orientés dans le sens trigonométrique et les contours intérieurs, c'est-à-dire les trous, dans le sens horaire, l'intérieur de l'objet est à gauche de chaque arête de la forme (cf. fig. II.1).

Cette distinction n'a de sens qu'en fonction de la topologie des différents contours fermés d'une section. Dans le cas de contours ouverts (trace de plis par exemple), la détermination de l'intérieur de l'objet nécessite une intervention de l'utilisateur.

- Le format "image" décrit chaque coupe par une image binaire ou en niveaux de gris. Les régions appartenant à l'objet dans chacune des images sont des ensembles de pixels<sup>1</sup>. A l'inverse du type vectoriel, les contours de l'objet ne sont pas directement individualisés. Il faut donc dans un premier temps extraire les contours ou les régions définissant l'objet par des procédures de segmentation. Les techniques utilisées sont en général dédiées à un type d'image particulier. Elles dépendent de différents facteurs, comme la nature et la qualité des images (présence de bruit, de zones texturées, ...), la taille et le contraste des objets à détecter, etc... C'est une étape clé qui précède souvent la phase de reconstruction.

Les contours, ou les régions, extraits de la segmentation sont généralement définis dans le même format que les images et sont donc représentés par un ensemble de pixels (cf. fig. II.2B).



**Figure II.2 :** Exemple d'image numérisée et de résultats de segmentation.

D'autres auteurs préfèrent disposer de frontières polygonales pour décrire les contours de l'objet (cf. fig. II.2C) lors de la reconstruction 3D [GREM 92]. Il est alors nécessaire d'inclure dans le processus des algorithmes de suivi de contour et une phase d'approximation polygonale des contours BitMap.

<sup>1</sup> Un pixel est le plus petit élément constitutif d'une image 2D. (contraction de Picture Element).

Toutefois, certains auteurs [NEFA 90] utilisent des méthodes de segmentation inspirées des snakes [KAWI 87] (ou contours actifs) qui permettent d'obtenir directement les différents contours de l'objet dans un format de type "vectoriel". Cette approche a l'avantage de supprimer la phase d'approximation polygonale, et permet le plus souvent d'obtenir une frontière polygonale respectant strictement des critères de densité et d'espacement entre les points.

Dans ces approches, plus la phase de segmentation est précise, et plus le nombre de points de chaque contour est important. Il est donc souhaitable, quand la densité des points n'a pas d'importance dans la procédure de reconstruction, de supprimer les points du contour qui n'ont pas d'influence sur la forme générale de la frontière. Il existe des algorithmes performants qui permettent de réaliser de telles approximations [EUTO 94].

En médecine, le traitement des signaux, obtenus par tomodensitométrie (scanner X) ou par Résonance Magnétique Nucléaire (RMN), fournit des images qui représentent les coupes de l'organe à étudier. Ces techniques permettent d'obtenir un nombre de coupes important, dans un temps limité et avec peu de gêne pour le patient. L'espacement entre deux sections consécutives est généralement très faible, et même lorsque cette distance inter-coupe augmente, elle reste souvent du même ordre de grandeur que l'espacement moyen entre les points d'une même coupe. D'autres techniques, comme la microscopie confocale [GREM 92] permettent d'obtenir une série de coupes dont la densité suivant l'axe des Z est égale à celle du plan XY.

En géologie, et dans le cas d'un gisement minier par exemple, les sondages horizontaux effectués à partir des galeries de mines permettent d'obtenir des points de la frontière de l'amas minéralisé. Ces points sont ensuite complétés par d'autres informations provenant de cartes et de coupes géologiques, d'observations dans les galeries des différents niveaux miniers exploités, et de données provenant d'autres méthodes de prospection du sous-sol. Toutes ces données, qui peuvent être de types différents, sont ensuite interpolées par les géologues qui fournissent des coupes plus ou moins complètes du gisement à différents niveaux de l'exploitation. Dans ce cas, les sections de l'objet sont directement disponibles dans le format vectoriel. C'est la raison pour laquelle nous ne nous sommes pas vraiment intéressés durant ce travail à la phase de segmentation des images.

Comme en géologie les données sont rares et coûteuses à obtenir, le nombre de sections que l'on peut réaliser est très faible. Ceci est d'autant plus vrai que les objets à étudier sont de grande taille. L'espacement entre les différentes coupes est, par conséquent, beaucoup plus grand que dans d'autres domaines, par exemple en médecine. La différence morphologique et

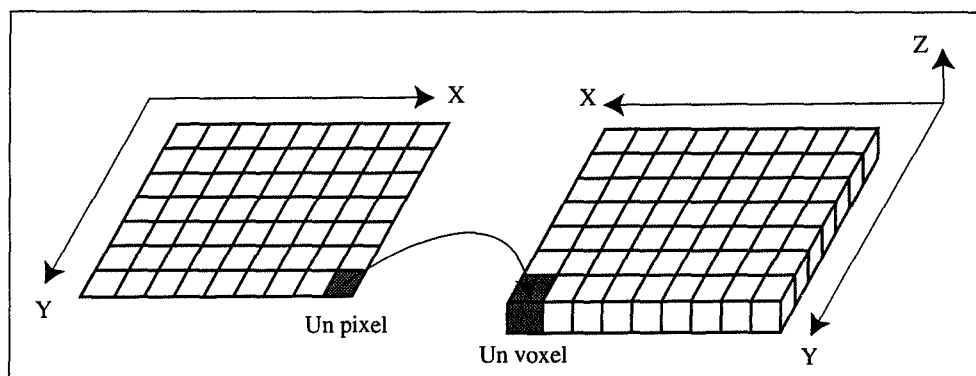
topologique entre deux niveaux consécutifs sera donc souvent très importante et posera des problèmes dans les phases de mise en correspondance des contours.

La variabilité de la densité des données influe bien entendu sur la qualité de la reconstruction, et donc sur le type de méthode à adopter.

Cette distinction fondée sur le format des données conduit à considérer deux grands types d'approches : les approches dites "volumiques" et les approches dites "surfaiques".

### II.2.2 - Approches dites "volumiques"

Les méthodes volumiques s'appliquent sur des données au format image. Elles définissent l'objet de façon volumique en utilisant la notion de voxel. Un voxel<sup>2</sup> est l'extension tridimensionnelle de la notion 2D de pixel (cf. fig. II.3).



**Figure II.3 :** Illustration de la notion de pixel (2D) et de voxel (3D).

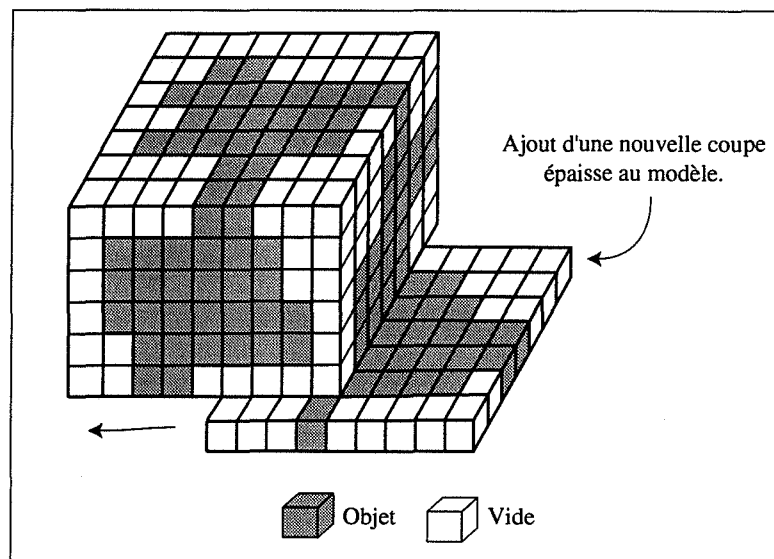
Considérons un cube englobant la scène à modéliser et divisons-le en autant de cubes élémentaires que nous désirons ou que le permettent les capacités de la machine. Chaque cube unitaire contiendra une information de base, présence ou absence de l'objet par exemple. Un voxel représente un de ces cubes élémentaires. La taille des voxels peut ne pas être constante dans toutes les directions, et plus particulièrement dans la direction perpendiculaire aux sections de l'objet.

Le principe général de ce type de méthodes est le suivant :

Dans un premier temps chaque section est assimilée à une coupe épaisse, dont chaque pixel, ou ensemble de pixels suivant la densité choisie, définit un voxel. Le modèle est alors

<sup>2</sup> Le mot voxel est la contraction de Volume Element.

reconstruit par empilement de toutes ces coupes épaisses (cf. fig. II.4). L'objet est ainsi représenté par un ensemble de voxels, donc par un volume.



**Figure II.4 :** Méthode de reconstruction volumique.

Ces méthodes sont bien adaptées aux cas où les sections sont faiblement espacées, puisque la superposition des différentes coupes définit de fait la correspondance entre les différentes zones de deux images consécutives. Quand la distance inter-coupes est plus importante, certains auteurs infèrent des coupes intermédiaires supplémentaires entre les sections initiales, ce qui permet de conserver une meilleure continuité de l'objet [ROLL 91].

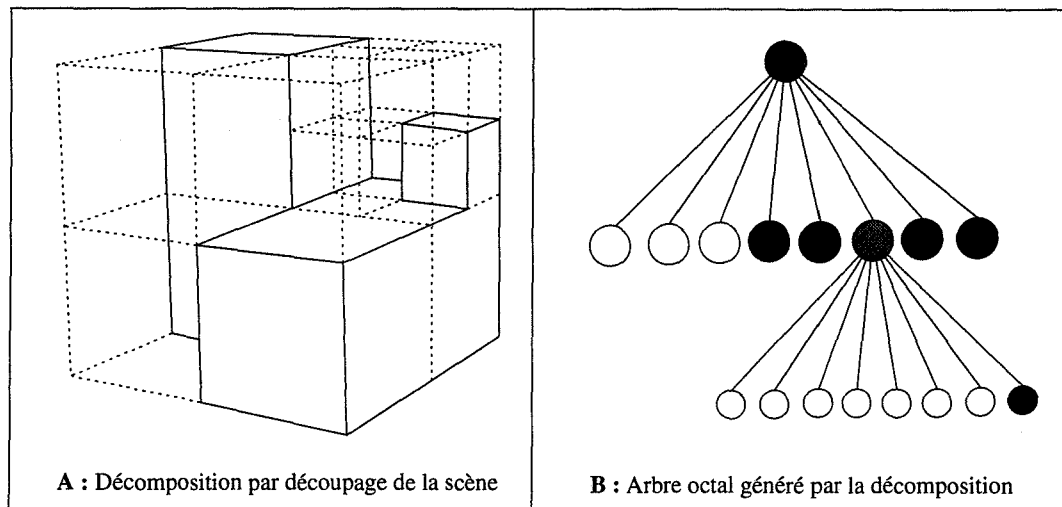
Le problème majeur des méthodes basées sur cette approche est lié au volume important de données qu'elles doivent stocker et qui est proportionnel à la définition et à la taille des images. Quand les objets ont des formes relativement simples, le problème de stockage est atténué par l'utilisation de voxels de plus grande taille. Dans ce cas, cette approximation n'influence pas trop l'aspect général de l'objet.

En revanche, si les objets sont complexes et "tortueux", une telle approximation ne peut être employée sous peine de perdre de nombreux détails et de modifier la topologie générale de l'objet. Ces méthodes sont alors souvent combinées avec une approche octree.

Tout d'abord une définition "grossière" de la taille des voxels est déterminée en fonction de la densité moyenne des données. Chaque voxel comporte alors plusieurs pixels. Pour chacun des voxels on regarde si l'ensemble des pixels est de même type. Si ce n'est pas le cas, certains pixels appartenant à l'objet alors que d'autres sont à l'extérieur, le voxel est subdivisé parallèlement aux plans Oxy, Oxz, Ozy. Le voxel est ainsi divisé en huit voxels plus petits. On étudie alors de nouveau les huit pixels selon le même processus. La division s'arrête quand



tous les pixels appartenant à un voxel sont soit à l'intérieur soit à l'extérieur de l'objet, ou lorsque la taille minimale pour un voxel est atteinte (cf. fig. II.5A).



**Figure II.5 :** Exemple de partition de l'espace permettant de repérer l'intérieur d'un objet, d'après [PEAR 88].

Le codage par octree permet de diminuer sensiblement le volume de stockage et offre une meilleure structuration du modèle 3D par la décomposition de celui-ci à l'aide de l'arbre octal (cf. fig. II.5B).

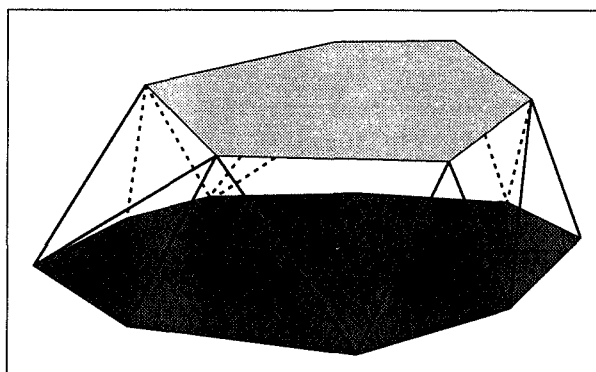
Les méthodes utilisant les voxels ne permettent pas de visualiser directement et de manière agréable les résultats de la reconstruction. Des techniques supplémentaires de lissage sont alors nécessaires pour obtenir des objets qui soient visuellement acceptables.

Le point fort de ce type de méthode est sa capacité à fournir aux utilisateurs des informations volumiques sur l'objet qui sont utiles dans certaines applications, pour permettre par exemple le calcul et la représentation de propriétés ou de compositions.

Leur faiblesse est liée à l'absence de la notion de surface.

### II.2.3 - Approches dites "surfaiques"

Les approches surfaiques travaillent sur des données directement disponibles en format vectoriel ou sur des données issues des méthodes de segmentation d'images dérivées des "snakes" ou des techniques d'extraction de contours polygonaux. Les différents contours, ouverts ou fermés, représentent la trace de l'intersection entre la surface de l'objet et les différents plans de coupes. Le but de la reconstruction 3D est alors de relier les points des différents contours pour former des facettes, en général triangulaires, qui représentent les différentes surfaces de l'objet (cf. fig. II.6). Les méthodes basées sur ce principe ont l'avantage de ne pas nécessiter un grand volume de données pour représenter l'objet.



**Figure II.6 :** Méthode de reconstruction surfacique.

Elles permettent de fournir des objets facilement manipulables qui peuvent être visualisés correctement de manière simple. Leur principal défaut est qu'elles ne sont généralement pas conçues pour fournir directement une description volumique de l'objet reconstruit, ce qui peut représenter un handicap dans certaines applications.

Les méthodes surfaciques sont largement utilisées en modélisation géologique, c'est pourquoi nous insisterons beaucoup plus sur ces méthodes dans la suite de l'exposé sur les méthodes de reconstruction.

#### **II.2.4 - La problématique de la reconstruction 3D**

Le premier problème auquel sont confrontés ces deux types d'approches, et qui est une conséquence du manque d'information entre les sections, est celui d'effectuer "la mise en correspondance des contours" situés sur les différentes coupes de l'objet.

Après avoir déterminé les connexions globales entre les contours, les méthodes surfaciques doivent ensuite construire les différentes surfaces de l'objet en triangulant l'ensemble des points des contours mis en correspondance. Cette correspondance locale, ou "correspondance entre points", s'accompagne souvent du traitement des problèmes liés à la gestion des trous et des branchements multiples.

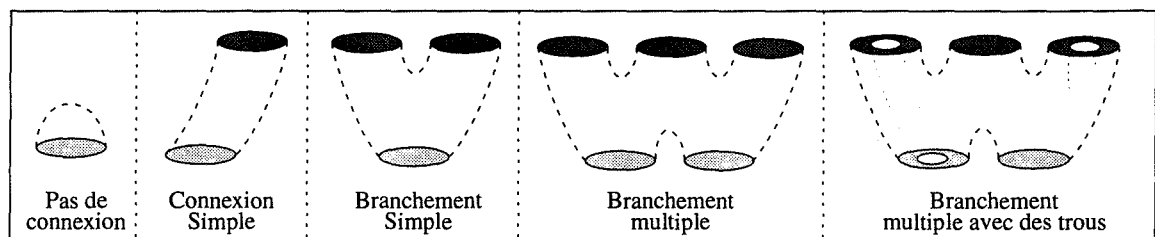
Enfin la dernière étape consiste à adapter au mieux la surface reconstruite à l'objet initial et à la visualiser de manière interactive et conviviale.

Tous ces problèmes sont étudiés séquentiellement dans les paragraphes suivants.

## II.3 - Mise en correspondance des contours

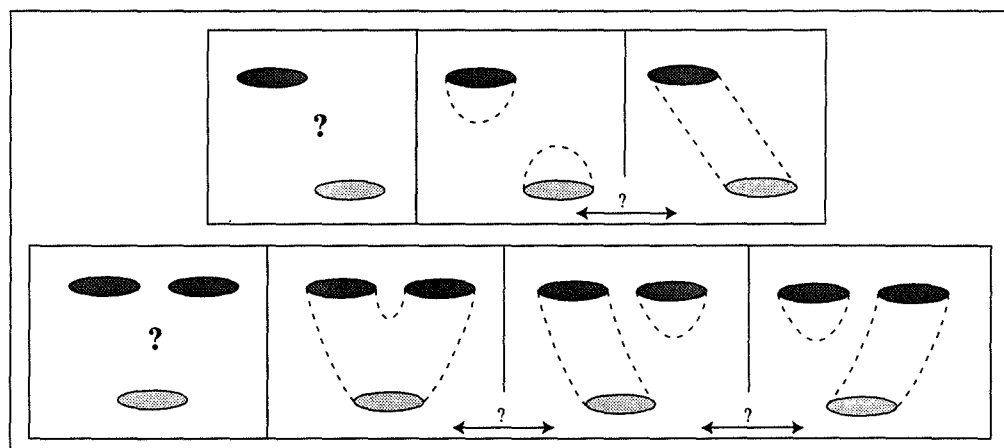
La mise en correspondance des contours est un problème réputé difficile à juste titre. C'est un problème général qui se pose quelle que soit la méthode employée et quel que soit le nombre de contours de chaque section.

Il s'agit de déterminer les relations qui existent entre les différents contours de deux sections consécutives. La phase de correspondance doit décider quels sont les contours des différentes coupes qui doivent être connectés. Les différents types de connexions sont illustrés par la figure ci-dessous.



**Figure II.7 :** Les différents types de connexion entre les contours de deux sections consécutives.

Si la topologie de l'objet est connue, et si la position des sections peut être déterminée, la mise en correspondance possède une solution unique déduite de la connaissance de l'opérateur. Dans tous les autres cas, et en raison du manque d'informations complémentaires entre les sections de l'objet, il n'existe pas a priori de réponse unique à ce problème. La figure suivante illustre, dans deux cas simples, la difficulté de choisir entre les différentes solutions de connexion.



**Figure II.8 :** Il n'existe pas de solution unique au problème de la connexion des contours.

La mise en correspondance est une étape capitale dans le processus de reconstruction 3D. C'est d'elle dont vont dépendre essentiellement la forme et la topologie des objets

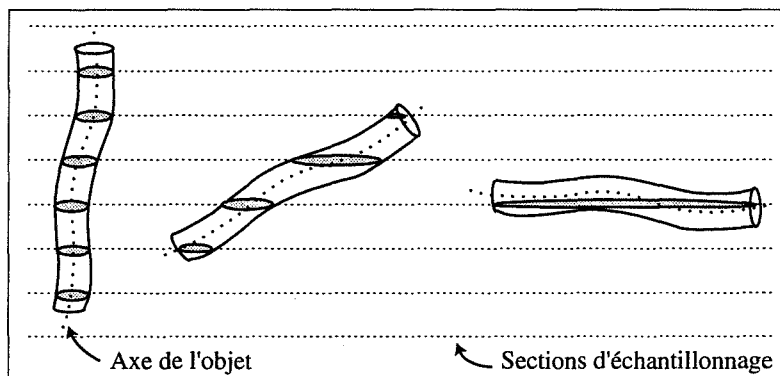
reconstruits, et suivant le type de mise en correspondance adopté, le résultat sera foncièrement différent.

Sans informations précises sur l'objet, il faut se baser sur des hypothèses d'association qui dépendront du type d'objet que l'on modélise, de la densité et de l'homogénéité des données, des techniques et des conditions de leur acquisition.

La mise en correspondance peut être plus ou moins facilitée par le type des données utilisées. En effet plus l'espacement entre les coupes est grand et plus le manque d'informations est important. Il sera donc plus difficile dans ce cas, d'effectuer les "bonnes correspondances" entre les différents contours.

D'autre part, la forme de l'objet rentre aussi en ligne de compte. Les sections d'un objet naturel, avec de nombreuses excroissances et de multiples branches rendront la correspondance plus délicate que celles d'un objet simple manufacturé.

L'angle entre les plans de coupe et l'axe de l'objet va aussi jouer un rôle important dans le processus d'association des contours. Ainsi la correspondance sera facilitée si les plans de coupe sont perpendiculaires à l'axe de l'objet à reconstruire. La distance entre les centroïdes de deux contours dans deux plans de coupes consécutifs sera en effet beaucoup plus faible si l'angle entre le plan de coupe et l'axe de l'objet est proche de  $90^\circ$  (cf. fig. II.9).



**Figure II.9 :** Résultat de l'échantillonnage en fonction de l'angle entre les plans de coupes et l'axe de l'objet. Le résultat de la mise en correspondance sera différent dans chacun des cas.

Notons que dans certains cas de reconstruction 3D le problème de connexion des contours est implicite. Par exemple, lors de la construction de surfaces altimétriques à partir de courbes isohypses, tous les contours à connecter sont inclus les uns dans les autres, et seuls les problèmes liés à la triangulation de ces contours sont à prendre en compte.

Une méthode de reconstruction bien conçue doit pouvoir être utilisée pour toutes sortes d'objets. En revanche, elle ne produira un résultat significatif que si les caractéristiques des sections utilisées permettent d'appliquer les hypothèses suggérées par la procédure de mise en correspondance préalable. Nous rappelons ici une évidence, mais qui est d'une importance majeure. Souvent, il est difficile de déterminer quels sont les types de données qui sont les

mieux traités par une méthode de reconstruction, et a fortiori ceux qui le sont moins bien. En ce qui nous concerne, le chapitre V est consacré à proposer d'autres types de mise en correspondance que celle utilisée basiquement dans notre méthode, et qui ne permet pas de reconstruire de manière correcte certains objets géologiques auxquels nous avons été confrontés.

Certains auteurs, dont Sequeira [SEQU 87], proposent une approche interactive qui permet de faire bénéficier le processus de reconstruction 3D de la connaissance que possède l'opérateur sur l'objet. Pour les applications dans lesquelles la structure de l'objet à reconstruire est bien connue de l'utilisateur (par exemple en médecine), ce dernier va pouvoir lever la plupart des indéterminations liées à la correspondance entre les différents contours. Cette approche est très séduisante, mais peut s'avérer longue et fastidieuse quand le volume de données à traiter est grand. Elle nécessite dans tous les cas une bonne connaissance a priori de l'objet, ce qui n'est pas le cas de tous les domaines intéressés par la reconstruction 3D.

De nombreux auteurs ont donc développé des méthodes qui essaient de mettre en correspondance les contours des différentes sections de manière automatique.

### **II.3.1 - Les approches automatiques dites locales**

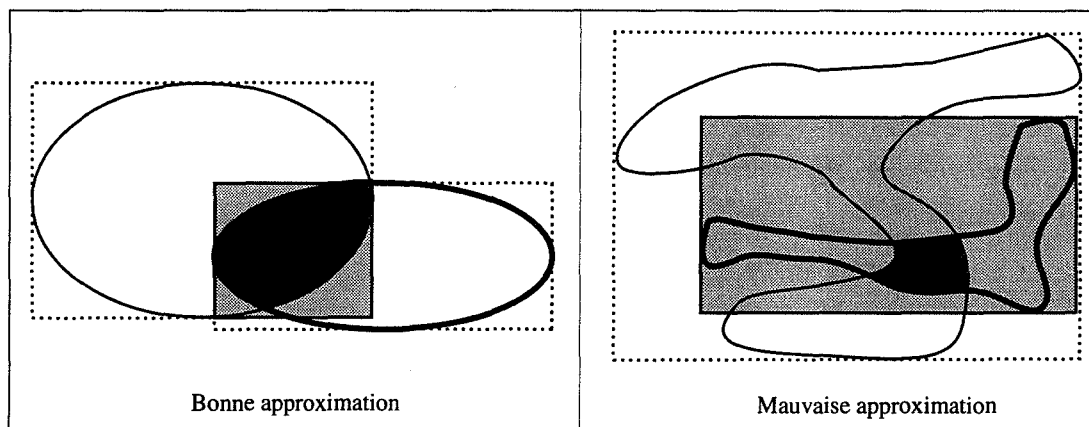
L'approche la plus naturelle, et la plus facile à mettre en œuvre, est de considérer que deux contours situés sur des sections adjacentes doivent être connectés si, après une projection orthogonale, ils se superposent "suffisamment". La mise au point d'une méthode de correspondance revient alors à définir précisément la notion de recouvrement entre deux contours. C'est ce type de méthode qui est employé par la majorité des auteurs.

Cette méthode de mise en correspondance peut être logiquement employée dans deux cas de figure :

- quand les coupes sont peu espacées et qu'elles sont perpendiculaires à l'axe des objets,
- ou quand on ne possède aucune information a priori sur la forme des objets.

Les méthodes volumiques [ROLL 91] sont souvent utilisées dans les applications de médecine qui traitent des coupes peu espacées. Elles peuvent ainsi directement superposer les coupes consécutives en utilisant la notion de proximité entre les différents voxels de chaque section, et espérer lever ainsi toute ambiguïté sur la connexion des contours.

Cette méthode ne peut pas s'appliquer directement pour les méthodes surfaciques et d'autres solutions ont été imaginées.



**Figure II.10 :** Méthodes d'approximation de la zone d'intersection entre deux contours par leur boîte englobante.

Ekoule et al. [EKPE 91] approximent la zone de recouvrement entre deux contours par l'intersection de leur boîte englobante (cf. fig. II.10). Les auteurs considèrent que les contours doivent être reliés si l'aire normalisée de l'intersection des boîtes englobantes est supérieure à un seuil prédéfini. Zyda et al. [ZYJO 87], Wang et al. [WAAG 86] utilisent aussi ce type de critères pour la mise en correspondance des contours, mais rajoutent une notion de typologie des contours à mettre en correspondance. Ainsi, les auteurs favorisent d'abord les connexions entre les différents contours externes, puis celles entre les contours internes des deux formes.

L'approximation de l'intersection de deux contours par celle de leur boîte englobante n'est utilisable que si les contours de l'objet peuvent être raisonnablement assimilés à des ellipses. Lorsque ce n'est pas le cas, Choi et al. [CHPA 94] proposent de calculer de manière exacte l'aire de l'intersection entre les différents contours, puis de connecter les contours dont l'aire d'intersection est supérieure à un seuil prédéfini. La méthode est donc plus longue mais elle permet de traiter convenablement l'ensemble des objets complexes.

De toute évidence, le défaut de ce type de méthodes est de ne pas corréliser deux contours de deux coupes consécutives qui ne se recouvrent pas, ou qui ne se recouvrent que très partiellement, alors qu'ils devraient être corrélés.

D'autres méthodes consistent à mettre directement en correspondance les points des différents contours et non plus les contours eux-mêmes. Elles recherchent pour tout point d'un contour le point le plus proche sur la section consécutive.

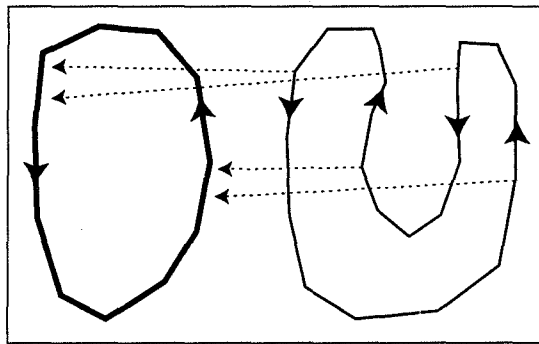
Dans cette optique, Barequet et al. [BASH 94] utilisent, comme point de départ de la triangulation, les portions de contours dont les points sont les plus proches. Les portions de contours restantes seront triangulées par une autre méthode.

La méthode utilisée par Boissonnat et Geiger [BOIS 88], [GEIG 93] n'effectue les mises en correspondance que de façon implicite. Les auteurs construisent la triangulation de

Delaunay de tous les contours et cherchent pour chaque triangle le point de la section consécutive, s'il existe, qui est le plus près du cercle circonscrit à ce triangle.

Ces méthodes de connexion basées aussi sur la proximité des contours permettent de mettre en correspondance des contours qui ne se recouvrent pas, mais dont les points sont assez proches.

Le but de la technique de Lin et al. [LILI 87], [CHLI 88] est d'associer à chaque point d'un contour, en fonction d'un critère de distance, un point situé sur un segment cible d'un contour de la section voisine, de telle façon que les arêtes supportant les deux points aient la même orientation. Ainsi, deux points peuvent être mis en correspondance même si les contours respectifs ne se superposent pas. Toutefois, les auteurs ne précisent pas si des cas illustrés par la figure II.11 peuvent se produire et être traités correctement par leur méthode.



**Figure II.11 :** Illustration de situations où certaines méthodes d'appariement de points peuvent échouer.

Dans les deux cas, méthodes de superposition simple ou de connexion des points du contour, il est préférable de pouvoir positionner correctement les formes avant d'effectuer la mise en correspondance pour obtenir un meilleur résultat.

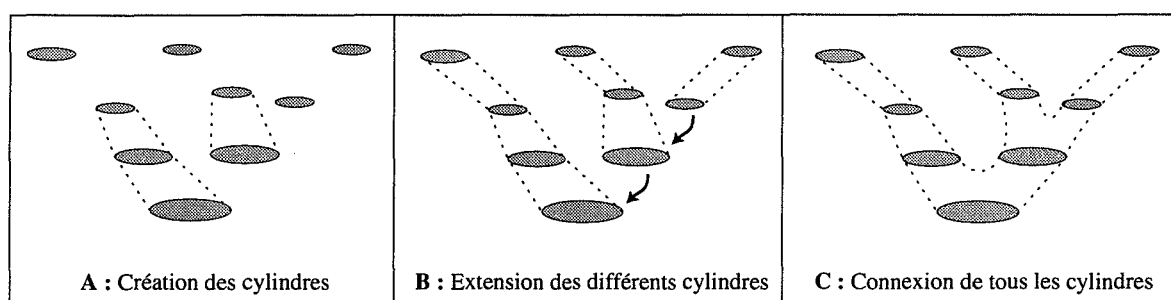
On émet alors l'hypothèse que les plans de coupe ne sont pas strictement perpendiculaires à l'axe de l'objet. Cet ajustement des formes peut s'effectuer par une série de rotations, de mises à l'échelle, de translations et de déformations des contours. L'effet de ces opérations doit, bien sûr, pouvoir être supprimé après la phase de triangulation.

Nous reparlerons en détail de l'ajustement des formes dans le chapitre V.

### II.3.2 - Les approches automatiques dites globales

Quand les coupes sont espacées, il est clair que les méthodes utilisant uniquement l'hypothèse de recouvrement des contours peuvent ne pas paraître optimales. Dans cette situation, certains auteurs essayent alors de prendre en compte l'information de l'ensemble des coupes pour aider les connexions entre les contours de deux coupes consécutives.

Dans cette optique, Meyers et al. [MESK 92] ont utilisé l'approche des cylindres généralisés définie par Soroka [SORO 81]. Chaque contour est d'abord approximé par une ellipse dont on connaît cinq paramètres : le grand et le petit axe, les coordonnées  $x, y$  du centre de l'ellipse et l'orientation du grand axe par rapport à l'axe des abscisses. Lorsqu'un contour ne peut être correctement assimilé par une ellipse, il est déclaré "complexe" et sera traité de façon particulière par la suite.



**Figure II.12 :** Mise en correspondance par la méthode des cylindres généralisés.

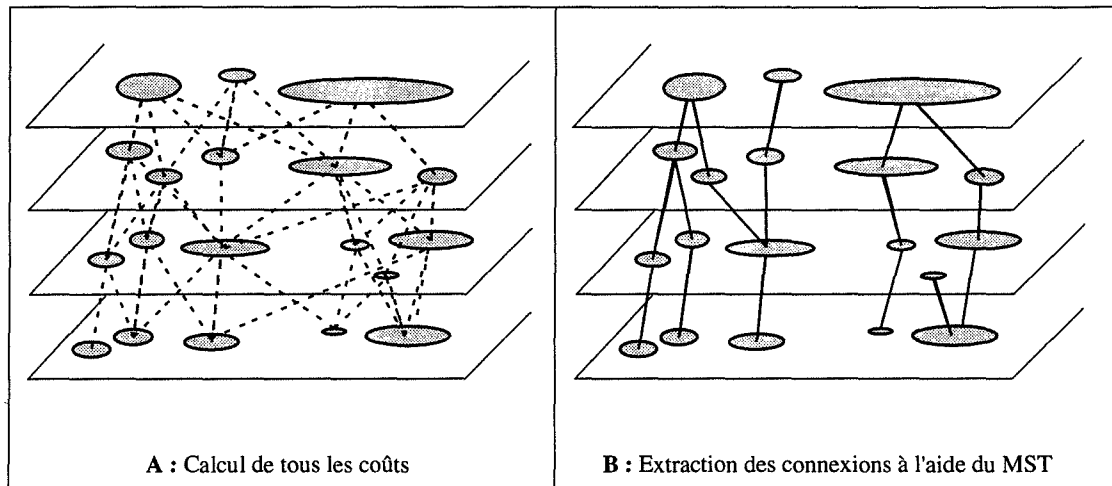
Le but de cette méthode est de construire un ensemble de cylindres qui comportent un nombre variable de contours (cf. fig. II.12C). Cette méthode cherche à minimiser le nombre total de cylindres en reliant le maximum de contours entre eux. Un contour elliptique est supposé appartenir à un cylindre si ses paramètres répondent aux critères imposés par ce cylindre, à savoir des fonctions linéaires sur les coordonnées du centre de l'ellipse et sur les axes de l'ellipse. Les auteurs imposent aussi une orientation de l'ellipse relativement constante, ce qui empêche la formation de cylindres vrillés. Chaque contour peut être incorporé dans un cylindre existant ou être lui-même l'initiateur d'un nouveau cylindre (cf. fig. II.12A). Un contour dit "complexe" est incorporé dans un cylindre si une partie de ce contour se superpose au contour situé à l'extrémité de ce cylindre.

Dans une deuxième phase, les cylindres sont regroupés entre eux pour former des objets. Les connexions entre les extrémités de deux cylindres, ou les connexions entre l'extrémité d'un cylindre et un contour intérieur d'un autre cylindre sont déterminées par un critère de recouvrement entre les deux contours (cf. fig. II.12B).

D'après Meyers et al. [MESK 92] cette méthode n'est pas vraiment fiable car elle dépend en grande partie de l'ordre dans lequel sont traités les contours. Les auteurs proposent



une autre technique de mise en correspondance globale basée sur l'utilisation d'arbres de recouvrement minimum<sup>3</sup>.



**Figure II.13 :** Mise en correspondance en utilisant un arbre de recouvrement minimum.

Après avoir approximé de la même manière tous les contours par des ellipses, les contours de deux coupes consécutives sont reliés par un graphe et un coût est calculé sur chaque connexion (cf. fig. II.13A). La fonction de coût entre deux ellipses est le carré de la distance entre les paramètres de ces ellipses. Ce coût est d'autant plus petit que les centres des ellipses sont proches et que les axes des deux ellipses se superposent. Les auteurs calculent ensuite l'arbre de recouvrement minimum du graphe initial. Cet arbre permet d'extraire des segments qui matérialisent des connexions entre les contours de différentes sections de l'objet (cf. fig. II.13B).

Dans une seconde phase, identique à celle de la méthode des cylindres généralisés, les auteurs essaient de fusionner plusieurs segments, ce qui permet de mettre en évidence les zones de branchements entre les différents contours mis en correspondance durant la première étape.

Ces deux méthodes nécessitent une hiérarchisation des contours. Elles permettent d'obtenir de bonnes correspondances quand les contours sont relativement simples et quand ils peuvent être correctement approximés par des ellipses. Ces approches, qui maximisent le nombre de connexions entre les contours, sont particulièrement adaptées à des objets qui ont une structure d'arbre et qui possèdent beaucoup de branches. Elles sont par exemple capables de reconstruire un réseau artériel. En revanche, le fait de forcer les connexions entre les contours rend ces méthodes inadaptées à d'autres types d'applications, par exemple la reconstruction des graviers contenus dans un ciment.

<sup>3</sup> Ou Minimum Spanning Tree (MST) en Anglais.

D'autre part, l'utilisation d'arbre de recouvrement minimal ne permet pas de traiter simplement le cas d'objets comportant des cycles et donc des trous (des tores par exemple).

### II.3.3 - Conclusion

En résumé, nous dirons qu'il n'existe pas de méthode universelle pour lever l'indétermination liée à la mise en correspondance des contours de deux coupes consécutives. La solution idéale semble être celle d'une méthode automatique, bien adaptée à l'application traitée, suivie d'une validation visuelle de l'utilisateur qui peut alors modifier la correspondance en fonction de sa propre connaissance de l'objet. La difficulté d'une telle approche réside dans le fait que, nous le verrons dans le paragraphe suivant, les méthodes de reconstruction possèdent souvent leur propre système de mise en correspondance qui peut, selon les cas, difficilement être remis en cause par l'intervention d'un opérateur.

Dans tous les cas, et quel que soit le type de mise en correspondance adoptée, la méthode doit être capable d'interdire les connexions aberrantes.

En raison de la coexistence d'informations géométriques de bas niveau et de connaissances de l'utilisateur sur l'objet, il serait pensable de développer des systèmes basés sur les techniques de l'intelligence artificielle pour résoudre le problème de la mise en correspondance. A notre connaissance, ce type d'approche n'a pas été exploré à ce jour.

Une fois que la mise en correspondance des contours est effective, il faut ensuite construire la surface et/ou le volume de l'objet, ce qui fait l'objet du paragraphe suivant.

## II.4 - Construction de la surface ou du volume de l'objet

Les premiers travaux concernant la reconstruction 3D à partir de coupes sériées datent des années 70. Du fait des faibles capacités en mémoire des ordinateurs, les premiers auteurs utilisaient alors des approches dites surfaciques.

Il existe trois approches classiques. Ce sont les méthodes dites optimales, les méthodes dites heuristiques et celles qui recherchent des points caractéristiques sur les contours avant de les trianguler. Nous allons dans une première partie expliquer le fondement de ces trois méthodes et commenter leurs différentes possibilités.

Nous exposerons ensuite, en deux parties distinctes, les méthodes permettant de trianguler deux contours uniques, et ensuite les méthodes qui se préoccupent de gérer les branchements multiples.

### II.4.1 - Les trois grands types d'approches

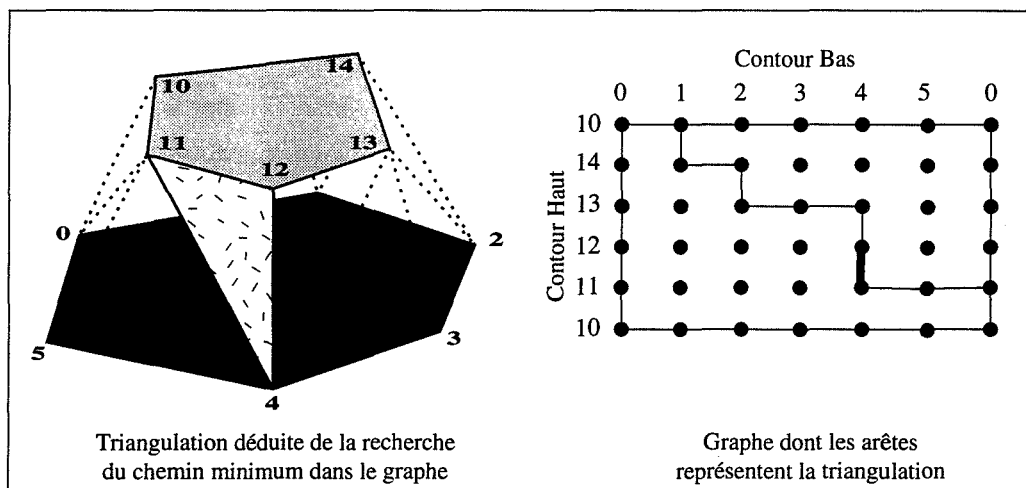
Les premiers auteurs ayant abordé ces problèmes [KEPP 75], [FUKE 77] se sont focalisés uniquement sur la meilleure manière de relier les points de deux contours appartenant à deux coupes consécutives. Deux auteurs [TIPP 76, 77], [CHSE 78] évoquent les difficultés liées aux cas de branchements multiples entre les contours. Tipper [TIPP 76] en indique les différents types possibles, à savoir les branchements simples, les branchements multiples et les cas où un contour ne peut être relié à aucun contour de la coupe voisine (figure II.7). Toutefois, sa méthode permet seulement la prise en compte des cas simples de branchements.

Keppel et Fuchs [KEPP 75], [FUKE 77] utilisent des méthodes que l'on peut considérer comme optimales, tandis que Tipper et Christiansen [TIPP 76, 77], [CHSE 78] utilisent respectivement une méthode de recherche de points caractéristiques et une méthode heuristique.

#### II.4.1.1 - Méthodes optimales

La première approche proposée par Keppel [KEPP 75] vise à rechercher dans un graphe toroïdal un chemin de coût minimum en fonction d'un critère donné.

Les deux contours à trianguler sont représentés par une liste ordonnée de points. Les listes de points du contour haut et bas sont respectivement positionnées sur la première ligne et la première colonne d'un graphe bidimensionnel. Chaque nœud du graphe représente alors un "segment" reliant deux points appartenant à deux contours différents. Chaque arête du graphe est limitée par deux nœuds, et représente un triangle dont les sommets sont les trois points matérialisés par les deux nœuds de l'arête (cf. fig. II.14).



**Figure II.14 :** Méthode de triangulation de deux contours dite "optimale".

Une arête du graphe peut être horizontale (respectivement verticale), elle représente alors un triangle reliant deux points consécutifs du contour haut (respectivement bas) à un sommet du contour bas (respectivement haut). Un coût est associé à chaque arête en fonction d'un critère prédéfini. Ce critère est l'aire du triangle pour Fuchs, et le volume du tétraèdre, obtenu en liant le triangle aux deux centroïdes des contours, pour Keppel. Le chemin de coût minimal est ensuite recherché à travers le graphe. Les arêtes de ce chemin matérialisent alors l'ensemble des triangles nécessaires pour trianguler les deux contours.

Cette méthode cherche donc une surface optimale entre deux contours en fonction d'un critère donné.

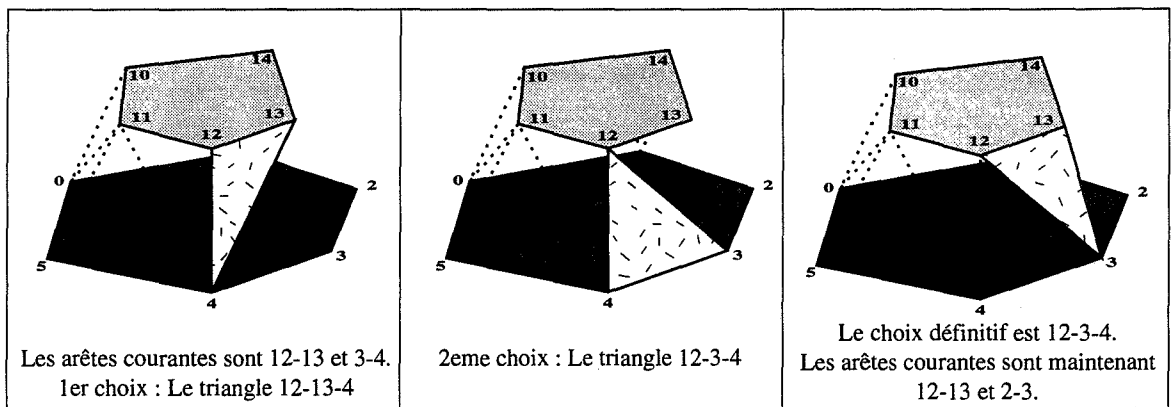
Fuchs et al. affinent cette méthode en proposant un algorithme en "division et fusion"<sup>4</sup> qui permet de diminuer la lourdeur algorithmique de la recherche d'un chemin dans le graphe. Ces deux méthodes sont difficilement utilisables pour gérer les cas de branchements multiples.

<sup>4</sup> En "divide and conquer" en anglais : Le problème est divisé récursivement jusqu'à obtenir une solution simple à ces sous-problèmes. La solution au problème initial est trouvée en remontant l'arbre par fusion des sous-ensembles.

### II.4.1.2 - Méthodes heuristiques

De manière générale, les méthodes heuristiques sont beaucoup moins coûteuses en temps de calcul et sont donc beaucoup plus rapides que les méthodes de recherche d'un chemin dans un graphe [SLPA 87].

Christiansen et al. [CHSE 78] proposent une approche qui minimise de façon locale la longueur des arêtes de chacun des triangles, sans utiliser de parcours de graphe. Les auteurs choisissent d'abord deux points de distance minimale qui sont chacun situés sur un des deux contours à trianguler. Ils parcourent ensuite l'ensemble des deux contours en construisant au fur à mesure les triangles. A chaque stade, deux triangles seulement sont candidats et celui dont la diagonale est la plus courte est choisi (cf. fig. II.15).



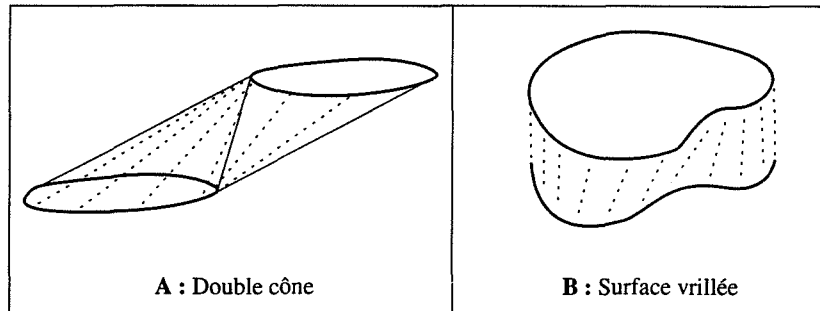
**Figure II.15 :** Méthode de triangulation de deux contours dite "heuristique".

La triangulation se propage ensuite pas à pas jusqu'à ce que les points des deux contours aient été entièrement traités.

C'est sans doute la méthode la plus simple et la plus facile à implémenter sur machine.

Cette méthode permet de traiter des cas simples de branchements en ajoutant de façon manuelle ou automatique un nouveau point entre les contours d'une même coupe.

Ces deux approches, optimales et heuristiques, peuvent conduire à créer des surfaces non désirables. Par exemple des doubles cônes (cf. fig. II.16A) ou des portions de surfaces vrillées (cf. fig. II.16B).

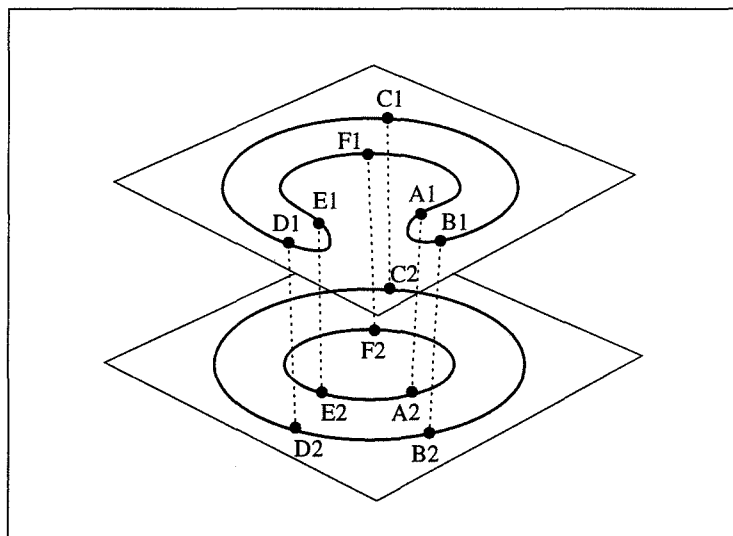


**Figure II.16 :** Certaines surfaces non désirables peuvent être obtenues par les méthodes optimales et heuristiques (D'après [CHSE 78]).

Ceci est respectivement dû au choix du critère global (aire minimale pour Keppel) et à une vision locale des contours dans le cas des méthodes heuristiques.

#### II.4.1.3 - Méthodes par appariement des points des contours

La méthode utilisée par Tipper [TIPP 76, 77] permet de limiter ces cas de dégénérescence. Avant de commencer à construire la triangulation, l'auteur détermine d'abord des points caractéristiques sur chacun des contours des deux sections.



**Figure II.17 :** Méthode de reconstruction par appariement de points caractéristiques (D'après [TIPP 76]).

Ces connexions peuvent être réalisées automatiquement en fonction de critère de distance, ou être désignées manuellement par l'utilisateur dans les cas plus complexes. Il s'agit d'associer un point P1 de la section S1 avec un point P2 de la section S2. Cette association impose un lien entre les deux contours supportant les points P1 et P2. La triangulation opère ensuite séquentiellement sur chaque ensemble de sommets situés entre deux couples de points caractéristiques (cf. fig. II.17).

Une mise en correspondance manuelle des points caractéristiques sur les deux sections permet aussi à cette méthode de traiter des cas simples de branchements.

Notons que Christiansen et Tipper soulignent l'importance d'un bon positionnement préalable des formes initiales. Ceci permet d'aboutir à une "meilleure" reconstruction de l'objet, en particulier dans ces cas de branchement. Ils préconisent un centrage des centroïdes par translation et une mise à l'échelle des deux sections.

Ces trois types d'approches, optimales, heuristiques et par recherche de points caractéristiques, ont servi de base à de nombreux travaux. L'amélioration sans doute la plus importante est la possibilité de traiter des cas de branchements multiples de façon automatique.

Nous allons maintenant exposer des méthodes qui améliorent les performances des méthodes ci-dessus ou qui utilisent des approches plus spécifiques.

## **II.4.2 - Problèmes liés à la triangulation entre deux contours**

Il est réducteur de vouloir classer les différentes méthodes en fonction d'un seul critère. Néanmoins, et par souci de clarté, nous avons regroupé les méthodes exposées en fonction de leur caractéristique principale, et en insistant sur celles qui nous paraissent donner des solutions à des problèmes importants.

- *Amélioration de la triangulation.*

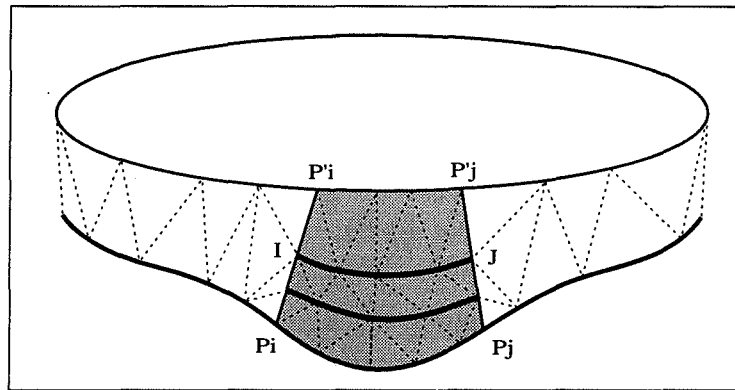
Plusieurs méthodes se sont attachées à définir au mieux des critères pour une "bonne" triangulation.

Ganapathy [GADE 82] utilise une méthode heuristique et suggère de conserver la mémoire de la longueur normalisée des chaînes de points déjà triangulées. En gardant un équilibre entre le nombre de points traités sur chaque contour, cette technique permet d'éviter les cas de dégénérescence décrits plus haut, et en particulier les double cônes. Il opte, par ailleurs, pour un critère local de verticalité des arêtes des triangles, ce qui réduit la formation de surfaces vrillées. Dans ce même esprit, Cook et al. [COBA 81] proposent de nouvelles heuristiques qui cherchent respectivement à diminuer l'angulosité entre les facettes de l'objet reconstruit, à contrôler la longueur des chaînes triangulées et à éviter la formation de surfaces vrillées. Welzl et al. [WEWO 93] se sont attaché à définir un critère optimal permettant d'obtenir la surface la plus lisse possible en créant des triangles qui permettent des angles maximaux entre les facettes.

Pour les méthodes dites optimales, Wang et al. [WAAG 86] utilisent une méthode de recherche dans un graphe qui permet, par relaxations successives, de ne retenir que les triangles les moins allongés.

• *Triangulation de deux contours de formes différentes.*

La méthode proposée par Kaneda et al. [KAWA 88] permet d'améliorer le processus de triangulation proposé par Christiansen quand deux portions de contours présentent une différence morphologique "assez marquée". Ces zones sont mises en évidence lorsque que les triangles sont extrêmement allongés. L'auteur propose une technique d'inférence linéaire de portions de contours limités à ces zones de changements brutaux.

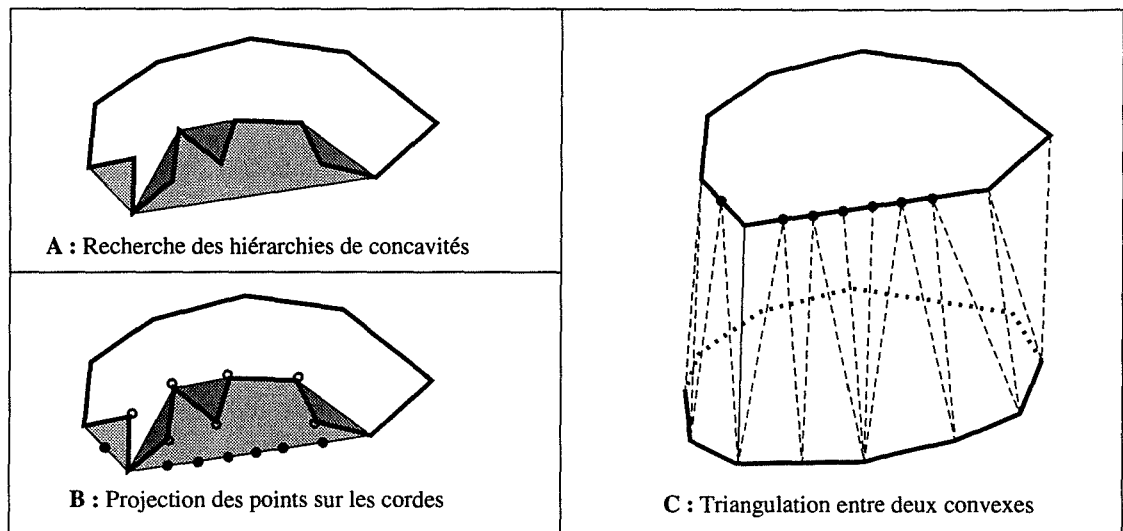


**Figure II.18 :** Principe d'interpolation linéaire de portions de contours dans les zones de variations de la morphologie de deux contours (D'après [KAWA 88]).

Chacune de ces zones est bornée par deux liaisons entre les points  $p_i$  et  $p_j$  du contour inférieur et les points  $p'_i$  et  $p'_j$  du contour supérieur (cf. fig. II.18). L'intersection de ses deux arêtes avec un plan intermédiaire aux deux sections  $S1$  et  $S2$ , définit deux nouveaux points  $I$  et  $J$ , qui seront les limites, droite et gauche, de la portion du contour intermédiaire. Les points intermédiaires entre  $I$  et  $J$  sont les milieux des segments  $[p_{i+1}, p'_{i+1}]$ . Les points  $I, I+1, \dots$  sont ensuite triangulés avec les points  $p_i, p_{i+1}, \dots$  du contour inférieur d'une part et avec les points  $p'_i, p'_{i+1}, \dots$  du contour supérieur d'autre part. Le nombre de portions de contours ainsi insérées dépend de la longueur des triangles situés dans la zone de différence morphologique. Le but de la méthode est d'obtenir des triangles de taille relativement homogène sur l'ensemble de la surface de l'objet.

Dans le même but de permettre la triangulation de deux contours de morphologies différentes, Ekoule et al. [EKPE 91] proposent de décomposer de façon itérative les différents contours en concavités élémentaires.



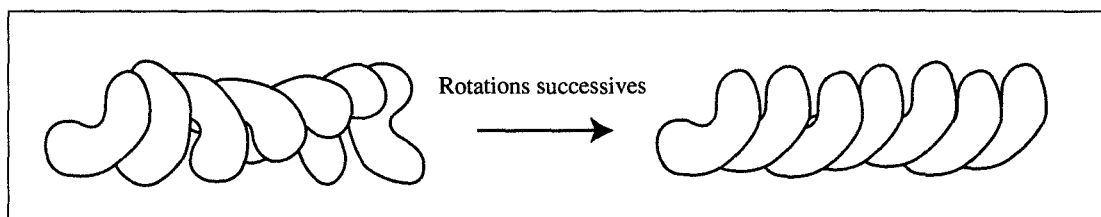


**Figure II.19 :** Principe de la méthode proposée par Ekoule et al. [EKPE 91].

Le nombre de passages nécessaires pour obtenir l'enveloppe convexe (EC) dépend de la complexité du contour. Les différentes concavités mises en évidence sont donc hiérarchisées en fonction du moment où elles sont déterminées (cf. fig. II.19A). Chaque zone est limitée par deux points qui peuvent être reliés par un segment (une corde), entièrement situé à l'extérieur de la forme. Chaque point du contour appartenant à une concavité est alors projeté sur la corde reliant les deux points extrémités de la zone (cf. fig. II.19B). Cette opération est réalisée sur toutes les zones concaves jusqu'à ce que tous les points soient situés sur l'EC des points du contour original. Ce traitement est réalisé sur les deux contours des deux sections voisines. Les différents contours sont donc maintenant convexes, et peuvent être facilement triangulés (cf. fig. II.19C). Une fois la triangulation achevée, les points qui ont été projetés sur l'EC sont remis à leur position initiale.

Cette méthode permet de trianguler correctement deux contours quelconques dont les formes ont des degrés de complexité différents, mais elle permet aussi d'éviter les cas de dégénérescence.

Quand les contours des différentes sections ont des orientations et des tailles vraiment différentes, Sloan et al. [SLHR 81] insistent sur le fait que les méthodes de triangulation décrites ci-dessus ne sont pas directement utilisables.



**Figure II.20 :** Dans cet exemple, le positionnement judicieux des différentes sections (ici des rotations) permet une reconstruction plus "harmonieuse" de l'objet.

En effet, il est préférable de faire coïncider au mieux deux contours de formes similaires, mais d'orientation et/ou d'échelles différentes, plutôt que d'essayer de les trianguler à l'aide de méthodes directes. Les auteurs proposent donc d'estimer cette similarité et de faire correspondre les différents contours par une série de translations, de rotations, de mise à l'échelle et de déformations (cf. fig. II.20). Quand les paramètres de cet ajustement sont très grands, les auteurs proposent d'insérer des coupes intermédiaires afin de respecter la topologie de l'objet. Une fois la triangulation achevée, les contours initiaux et intermédiaires subissent les transformations proportionnelles inverses. Cette technique permet en particulier de reconstruire de manière correcte des objets fortement vrillés.

Toutes les méthodes exposées ci-dessus donnent de plus ou moins bons résultats suivant le type de données traité. Il est par conséquent très difficile de les comparer de façon systématique. Elles s'attachent toutes à améliorer un point particulier de la triangulation de deux contours.

- *Recherche des points caractéristiques entre deux sections.*

Collin [COLL 94] propose de mettre en correspondance les différents points de deux contours par une méthode issue des techniques de programmation dynamique. Le calcul des coûts est basé sur une fonction de distance et sur un critère de courbure du contour. Cette technique permet d'extraire un petit nombre de points qui ont un fort degré d'association. Une éventuelle triangulation pourrait ensuite être opérée, à la manière de Tipper [TIPP 76], dans l'intervalle entre deux couples de points associés.

Ce type de méthode, combiné avec des informations issues d'une squelettisation des formes, peut être efficacement utilisée pour la mise en correspondance des points de deux contours, ouverts ou fermés, et permet de guider de façon plus précise la reconstruction de certains objets (cf. Chap. V). Cette méthode ne s'applique pour l'instant qu'à deux contours uniques.

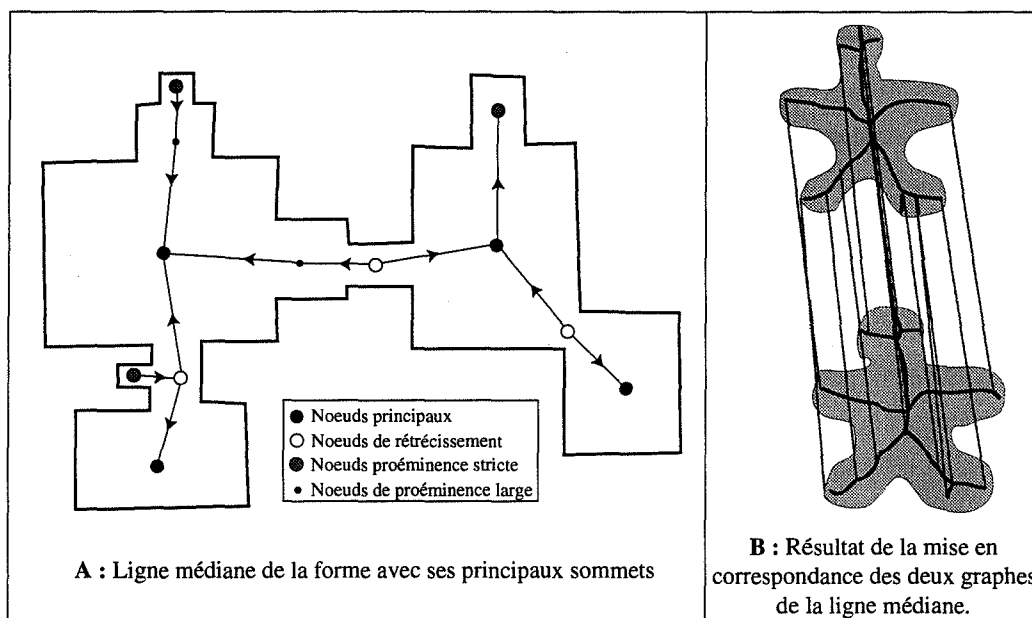
Dans le même esprit, notons que Rolland et al. [ROMO 89, 91], [ROLL 91] proposent une méthode intéressante d'association de deux contours par une mise en correspondance d'une approximation de l'axe médian des deux contours, la ligne médiane.

Chaque forme est alors décrite par un graphe pondéré dont les nœuds caractérisent les régions de la forme (cf. fig. II.21A). La connexion entre ces différents nœuds est entre autres liée au type du nœud (minimum local, maximum local, etc...). La recherche du graphe de mise en correspondance final s'effectue à l'aide d'une recherche heuristique de cliques<sup>5</sup> dans un

---

<sup>5</sup> Sous-graphe d'un graphe G où tous les sommets sont reliés deux à deux.

graphe planaire intermédiaire d'association entre les nœuds des deux lignes médianes. Ce graphe d'association est construit en tenant compte du type des sommets, de l'importance de la région associée à un nœud, de la configuration locale du graphe autour du nœud et de sa position dans le graphe. A la fin de la procédure, les différents nœuds sont appariés sur les deux formes (cf. fig. II.21B).



**Figure II.21 :** La ligne médiane est l'approximation de l'axe médian de la forme (figure A). Elle permet de mettre en correspondance les contours de deux formes voisines (figure B), d'après [ROLL 91].

La recherche au niveau de l'axe médian permet de s'affranchir des irrégularités des contours de l'objet, alors que la méthode présentée par Collin permet une mise en correspondance précise au niveau des sommets. Ces deux méthodes semblent donc être très complémentaires. D'autre part, les méthodes utilisant les squelettes permettent d'ajouter des informations qui ne dépendent ni de la densité des points ni de la taille des objets.

Kehtarnavaz et al. [KESI 88] décrivent une autre méthode qui permet une mise en correspondance de portions caractéristiques des deux contours. Les auteurs décomposent chacun des contours en primitives de base qui sont des arcs (suite de segments dont les angles sont modérés), des protusions ou intrusions (segments dont les angles sont importants) et enfin de simples arêtes. Un contour est donc représenté par une chaîne de ces primitives. Il recherche ensuite dans le graphe formé par l'ensemble de ces primitives les associations qui minimisent le quotient de la base sur le périmètre de chaque primitive. Les zones appariées entre chaque contour sont alors facilement triangulées. Cette méthode semble ne pas pouvoir diminuer l'influence du "bruit" présent sur les contours lorsque ceux-ci ne sont pas bien approximés.

Ces trois dernières méthodes permettent, du fait de l'appariement préalable de points ou de portion de contours, de donner une importance supplémentaire à la morphologie de chaque section. Elles ne se préoccupent plus seulement de définir une "bonne" triangulation, mais essaient de construire une surface qui conserve un "sens" à l'objet, en fonction de l'unique information géométrique disponible.

- *Existence d'une triangulation.*

Récemment, Gitlin et al. [GIOR 93] ont posé la question de savoir si la triangulation de deux polygones était toujours possible. Si l'on ne considère que des polyèdres simples de genre 0 (sans anses) et si l'on ne s'autorise pas à ajouter de nouveaux points, les auteurs démontrent qu'il n'existe pas toujours une triangulation "acceptable" entre deux polygones simples.

Par triangulation "acceptable" les auteurs entendent une triangulation dont deux éléments quelconques sont :

- ou disjoints
- ou partagent un sommet
- ou partagent deux sommets et en conséquence la totalité d'une arête.

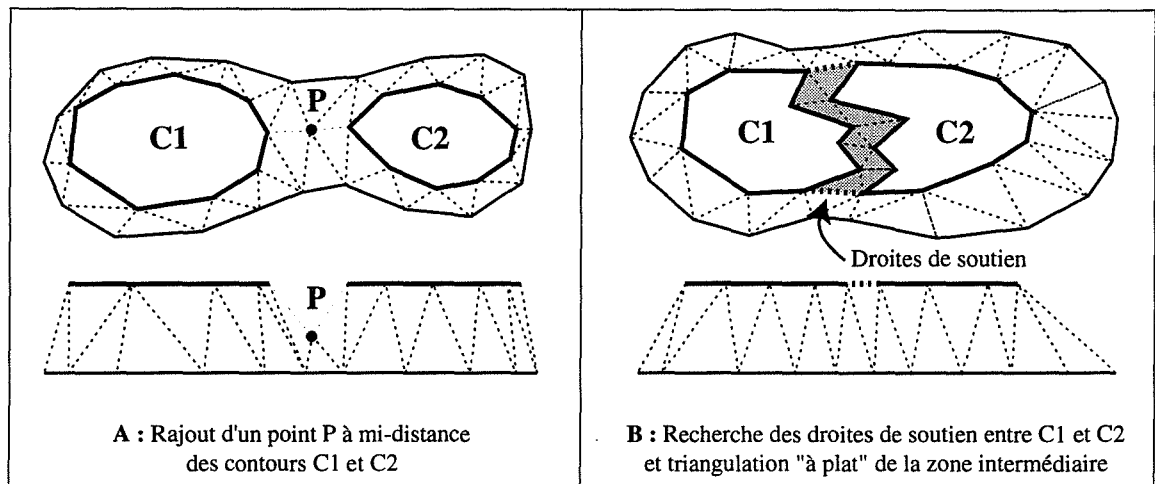
Toutes les méthodes présentées ci-dessus, qui n'ajoutent ni points ni arêtes supplémentaires, peuvent donc, dans des cas extrêmes générer des solides auto-intersectants.

### **II.4.3 - Solutions apportées aux cas de branchements multiples**

Lorsque deux sections consécutives comportent plusieurs contours, et une fois que la mise en correspondance entre les contours a été correctement effectuée (cf. § II.2.3) il faut chercher une surface qui permette de connecter le plus élégamment possible les différents contours. De nombreux auteurs se sont intéressés à ce problème réputé difficile, et ont fourni des solutions plus ou moins systématiques.

D'une manière générale les auteurs traitent ce problème en ajoutant des points ou des "ponts" entre les contours d'une même section, ou en insérant des coupes intermédiaires.

Christiansen et al. [CHSE 78] décrivent une méthode qui permet de gérer des cas de branchements simples, c'est-à-dire entre deux contours d'une section S1 et un contour d'une section S2.



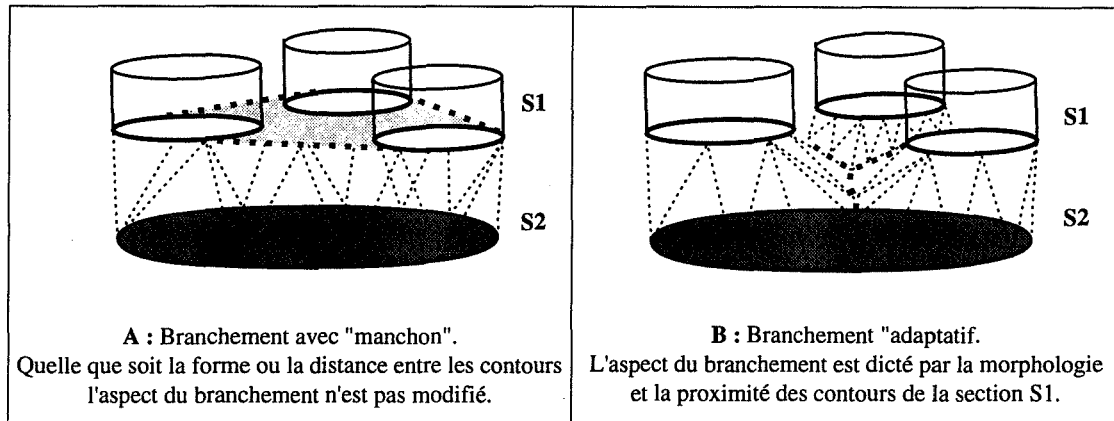
**Figure II.22 :** Méthodes de gestion de branchements simples.  
(D'après [CHSE 78] modifié)

Dans les situations où les deux contours de S1 ont des formes simples, l'auteur rajoute un point P, dont les coordonnées X et Y sont à mi distance de ces deux contours. La coordonnée Z est positionnée à une altitude intermédiaire entre les deux coupes (cf. fig. II.22A). Tous les points de la coupe S1 sont alors numérotés de nouveau en prenant aussi en compte le point P, de façon à ne considérer qu'un contour unique hybride. Ce contour est alors triangulé normalement avec son homologue de la section S2.

Lorsque les contours ont des formes plus complexes, en particulier lorsqu'ils ne sont pas linéairement séparables, l'auteur propose de générer manuellement un contour unique en fusionnant les deux contours avec leurs droites de soutien. L'espace compris entre les deux droites de soutien et les portions des deux contours qui sont face à face, est alors triangulé pour obturer le vide existant (cf. fig. II.22B). La triangulation s'opère ensuite normalement entre deux contours consécutifs.

Meyers et al. [MESK 92] utilisent la même méthodologie, mais déterminent de manière automatique les droites de soutien entre les deux contours de la même section. Ils calculent l'enveloppe convexe des contours d'une même section et extraient les couples de points consécutifs qui n'appartiennent pas au même contour. Les arêtes reliant ces couples de points sont les droites de soutien recherchées. La triangulation se poursuit de la même manière que celle de Christiansen et al.

Ces deux méthodes présentent l'inconvénient de créer un "manchon" autour des zones de branchement lorsque plusieurs contours doivent être connectés ensemble sur les deux sections consécutives (cf. fig. II.23).



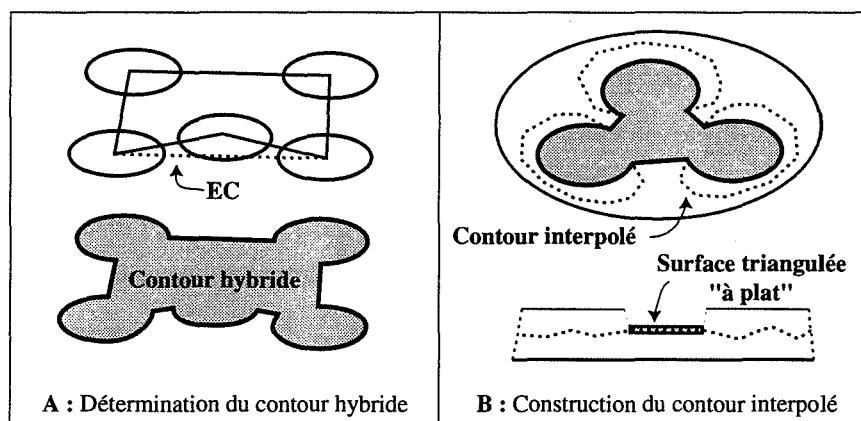
**Figure II.23 :** Les méthodes de branchement de type "Christiansen" produisent des surfaces non réalistes.

En effet, l'espace compris entre les contours d'une même coupe (en grisé sur la figure II.23A) est toujours triangulé à la même hauteur, alors que l'on souhaiterait obtenir la connexion illustrée par la figure II.23B. Lorsque le nombre de connexions est plus important cette méthode ne permet pas de visualiser exactement les zones où le solide se scinde en deux.

D'autre part, comme cette méthode ne s'occupe que des contours externes, elle ne permet pas de gérer la présence de trous dans les contours lors des phases de branchements.

Une méthode différente est présentée par Ekoule et al. [EKPE 91]. Elle utilise l'ajout d'une coupe intermédiaire qui est construite de la manière suivante :

Le premier stade consiste à définir un contour hybride à partir des  $k$  contours de la section S1.



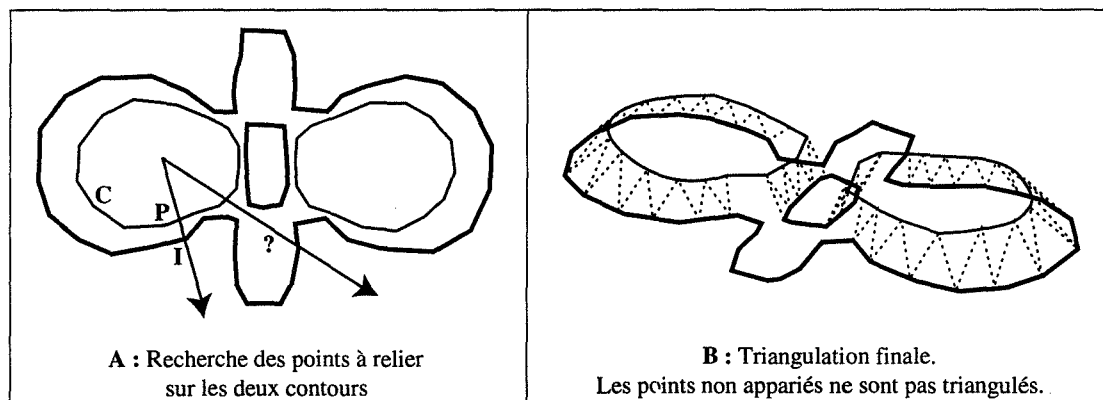
**Figure II.24 :** Ajout d'un contour interpolé par la méthode de [EKPE 91].

Un premier contour C0 dont les sommets sont les centroïdes des  $k$  contours de la section S1 est d'abord construit. Le contour hybride est le résultat de l'union de C0 et de

l'ensemble des  $k$  contours de  $S1$  (cf. fig. II.24A). Les points de ce contour sont alors triangulés avec ceux du contour de la section  $S2$ . Les sommets du contour intermédiaire sont les milieux de chaque liaison entre un point du contour hybride et le contour de la section  $S2$ . Ce contour interpolé n'est donc pas planaire. La triangulation finale est achevée en triangulant le contour de la section  $S2$  avec le contour interpolé d'une part, et les  $k$  contours de la section  $S1$  avec les  $k$  contours situés sur la coupe intermédiaire (cf. fig. II.24B).

Comme la méthode précédente, cette technique ne permet pas de traiter correctement les formes trouées, et pose des problèmes lorsque  $k$  contours de la section  $S1$  doivent être connectés avec  $k'$  contours de la section  $S2$ . D'autre part, certains contours de l'objet sont toujours triangulés "à plat" sur la même section.

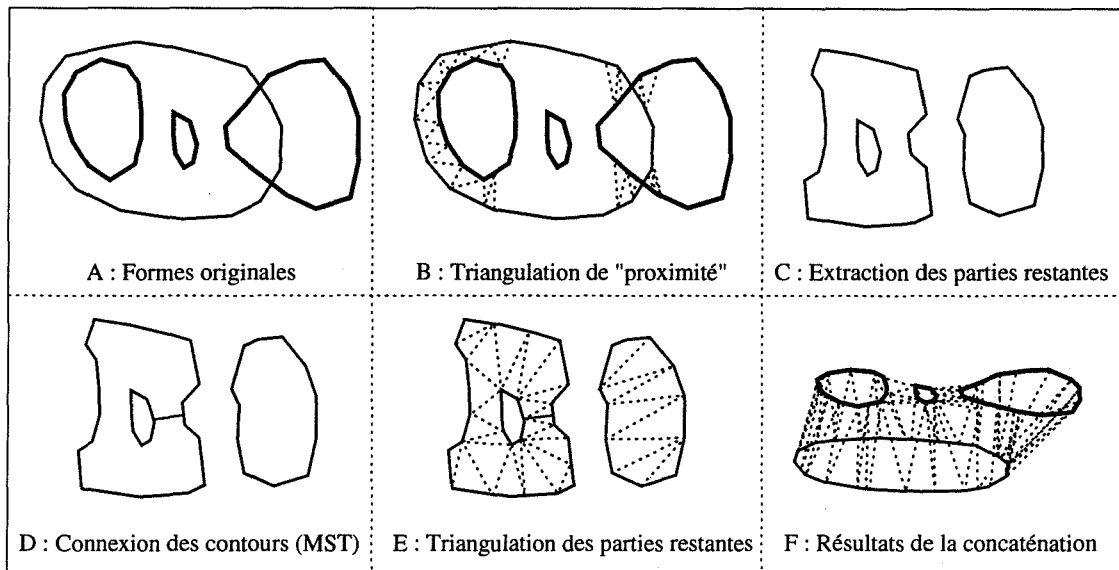
Zyda et al. [ZYJO 87] proposent une méthode qui permet de traiter les branchements multiples ainsi que les formes trouées. Elle s'adapte bien au cas où les différents contours sont inclus l'un dans l'autre en projection, mais ne prend pas en compte automatiquement les contours qui se superposent partiellement. Après avoir projeté les contours sur le même plan, leur méthode revient à lancer des rayons passant par le centroïde d'un contour  $C$  et par ses différents points  $P_i$ . Ils déterminent ainsi les points d'intersection  $I_j$  entre le rayon et les autres contours. Le point d'intersection  $I$ , le plus proche du point  $P$  du contour  $C$ , par lequel passe le rayon, est apparié avec le point  $P$  (cf. fig. II.25A).



**Figure II.25 :** Méthode de reconstruction de contours emboîtés par la technique de "lancer de rayon".  
(D'après [ZYJO 87])

Cette technique gère intelligemment les contours emboîtés, mais possèdent de nombreuses limitations dans la triangulation effective des différentes branches d'un objet. Certains points peuvent en effet ne pas être appariés et la triangulation n'est donc pas complète (cf. fig. II.25B).

Récemment, Barequet et al. [BASH 94] ont proposé une méthode de reconstruction qui comporte de nombreuses étapes (cf. fig. II.26).



**Figure II.26** : Les différentes étapes de la méthode de reconstruction proposée par [BASH 94].

Après avoir sur-échantillonné les données, ils cherchent des portions de contours qui sont suffisamment proches d'autres portions de contours de la coupe voisine. Cette recherche dépend d'un paramètre qui doit être fixé par l'utilisateur au vu de la dynamique de l'ensemble des coupes. Ensuite les auteurs triangulent ces portions de contours (cf. fig. II.26B). Ils extraient les parties non triangulées restantes qui peuvent être trouées, et pour chacune de ces zones calculent un arbre de recouvrement minimum qui leur permet de relier par des "ponts" les différents contours de la zone en fonction de la distance minimum entre chacun de ces contours (cf. fig. II.26D). Une fois que les trous ont été connectés, les auteurs triangulent les différents points des contours situés à l'intérieur de la zone, ce qui permet de relier des couples de points appartenant aux deux sections S1 et S2, mais aussi des couples de points appartenant à la même section (cf. fig. II.26E). Certaines parties de l'objet peuvent donc être, comme dans les méthodes précédentes, triangulées à plat.

Cette méthode, qui permet de gérer les branchements mais aussi les formes trouées, nous semble relativement complexe car elle fait appel à de nombreuses procédures. Néanmoins, les temps d'exécution semblent être satisfaisants.

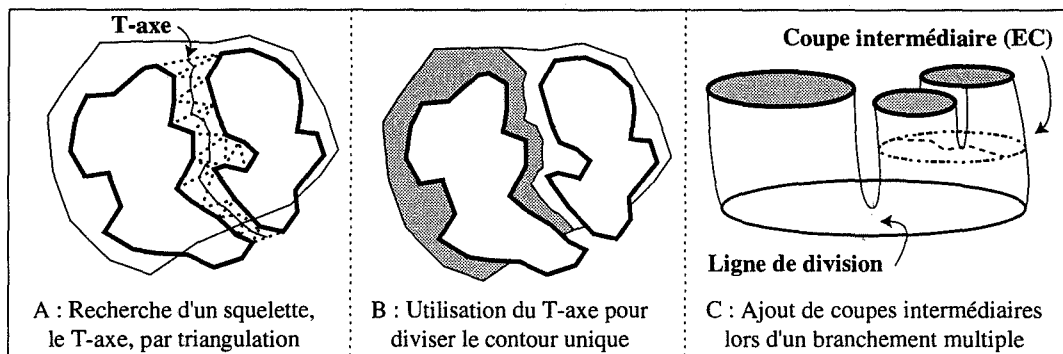
Shantz [SCHA 81] utilise basiquement la méthode décrite par Christiansen en rajoutant des ponts entre les différents contours d'une même forme. Lorsque les ponts d'une forme S1 sont susceptibles d'intersecter en projection des contours de l'autre forme S2, l'auteur utilise alors une approximation de l'axe médian pour connecter les différents contours. L'axe médian des contours de S1 est projeté sur la coupe S2 en ne gardant que les parties extérieures aux contours de S2. Il fait de même pour l'axe médian de S2. L'auteur triangule ensuite les contours de S1 avec la partie extérieure de l'axe médian de S2 qu'il positionne sur S2.



D'après l'auteur, cette technique ne peut pas s'appliquer aux formes trouées complexes.

Cette méthode est astucieuse puisqu'elle permet, à l'inverse des méthodes présentées ci-dessus, de définir de vrais branchements entre les différents contours des deux sections. L'auteur utilise aussi une approximation de l'axe médian pour "fermer" un contour qui ne se relie à aucun autre contour de la section voisine. Il projette cette approximation de l'axe médian à l'altitude de la coupe voisine et s'en sert pour trianguler le contour isolé, ce qui permet de définir une ligne de crête.

Récemment, Choi et Park [CHPA 94] ont proposé une méthode proche de celle décrite par Shantz, et qui traite apparemment l'ensemble des cas de branchement. Les auteurs divisent le problème du branchement multiple en une série de branchements simples que leur procédure permet de traiter correctement.



**Figure II.27** : Procédure de branchement simple dans la méthode exposée par [CHPA 94].

Tous les cas de branchements sont donc ramenés à un cas simple, relier deux contours de S1 à un contour de la section S2. Ils calculent l'EC de deux contours de S1, et soustraient l'EC du contour de S2. Ils obtiennent alors soit un "canyon" soit un "lobe". Un canyon contient dans son contour deux droites de soutien partageant les deux contours de S1, alors qu'un lobe n'en contient aucune. Une approximation du squelette est ensuite calculée à l'intérieur du canyon ou du lobe à partir d'une triangulation de ces zones. Pour cela, les auteurs connectent le milieu des arêtes intérieures de chaque triangle (cf. fig. II.27A). Cette approximation, le T-axe, est ensuite utilisée pour diviser en deux parties le contour de la section S2 (cf. fig. II.27B). Chaque partie étant alors triangulée avec un des contours de S1 (cf. fig. II.27C).

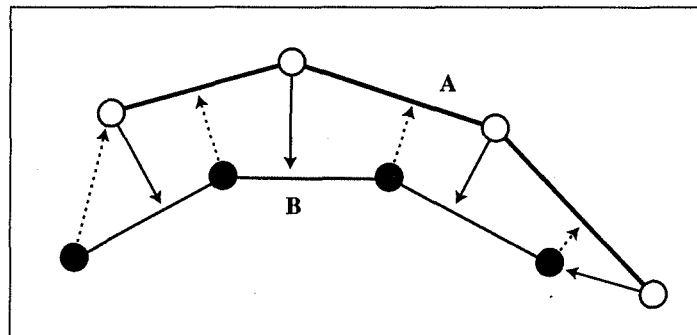
Les auteurs ne rajoutent une coupe intermédiaire, union de l'enveloppe convexe et du T-axe, que si ils sont en présence d'un cas de branchements multiples. Ils déterminent alors à l'aide d'un graphe et de critères de proximité quels sont les contours qui devront d'abord être associés. Les cas de branchements simples sont ainsi traités séquentiellement (cf. fig. 27C).

Cette méthode ne semble pas construire une "vraie" surface pour les contours troués. D'autre part, suivant la position du T-axe sur S2, la triangulation entre S1 et S2 peut s'auto-intersecter.

Nous allons maintenant présenter quatre approches qui traitent le problème de la reconstruction 3D d'une manière originale et dont certaines semblent gérer de façon quasi systématique l'ensemble des cas exposés ci-dessus.

• *Appariement élastique et inférence de coupes*

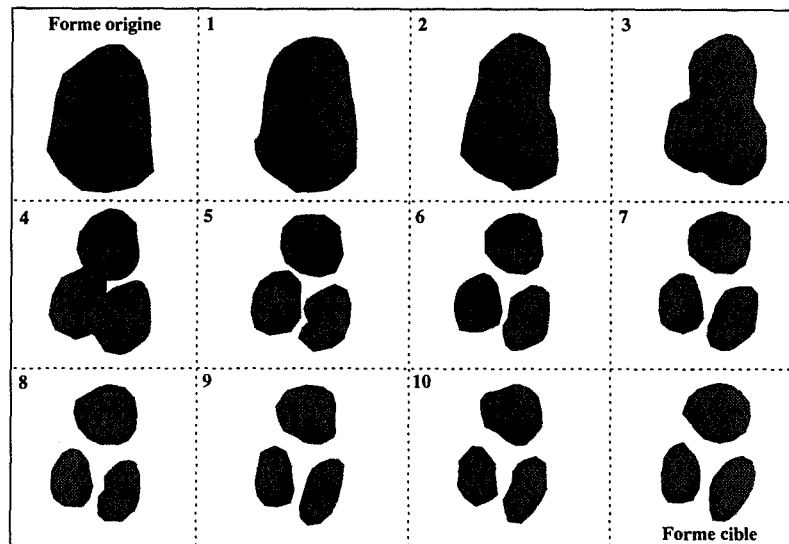
La première de ces approches est proposée par Lin et Chen [LILI 87], [CHLI 88]. Elle est basée sur une technique d'inférence de coupes. Après avoir associé les points des différents contours entre eux (voir le détail de la méthode dans le paragraphe précédent) les auteurs proposent d'effectuer une interpolation élastique dynamique basée sur la technique de Burr [BURR 81a, 81b]. Ils définissent pour chaque point d'un contour origine un vecteur de champ de force, orienté vers le segment cible, et qui est une fonction de la distance et de l'angle entre le point et ce segment (cf. fig. II.28).



**Figure II.28 :** Association des différents points de deux chaînes polygonales A et B. Chaque vecteur représente un champ de forces utilisé dans l'interpolation élastique.

Ils itèrent la procédure en modifiant ces vecteurs et génèrent ainsi des contours intermédiaires entre chaque contour origine et chaque contour cible.

Dans le cas de branchements multiples la solution est obtenue par l'union des contours intermédiaires à l'itération k (cf. fig. II.29).



**Figure II.29 :** Résultat de l'interpolation entre une forme origine et une forme cible (D'après [LILI 87]).

Cette technique, à l'origine basée sur les voxels, permet aussi de définir l'objet par des facettes reliant les points aux différentes itérations. D'autres méthodes d'interpolation [SEGR 92], [SEGA 93] peuvent être employées dans le même but.

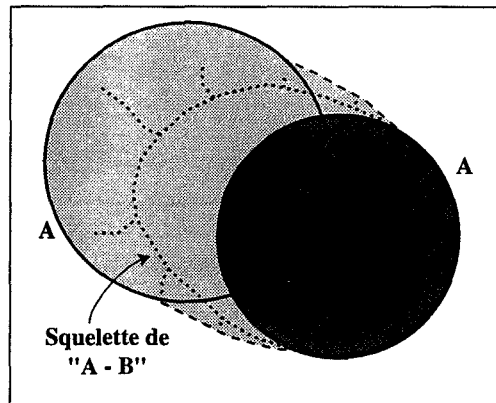
Ces techniques d'interpolation semblent être bien indiquées pour reconstruire des formes avec peu de branchements mais dont la morphologie est complexe avec des apophyses et des zones de rétrécissement qui sont mal restituées lorsque la correspondance s'appuie uniquement sur des méthodes de superposition (voir chapitre V).

#### • *Empilement et inférence de coupes*

Dans le domaine du traitement d'images, deux auteurs, Yoshikazu [YOSH 92] et Montanvert et al. [MOUS 93], [USMO 93] ont proposé des méthodes de reconstruction originales basées sur l'inférence et l'empilement de coupes dans une approche de type voxels. Nous allons décrire ces deux méthodes qui utilisent respectivement les notions de squelette et de distance de chanfrein.

La première méthode utilise les outils de la morphologie mathématique [SERR 82] (opérateur de combinaison d'image comme "OU", "ET", érosion et dilatation, etc...). Après avoir projeté les deux coupes consécutives sur un même plan, Yoshikazu extrait le squelette de chaque pseudo zone de différence entre les contours des deux sections (cf. fig. II.30). L'ébarbulage<sup>6</sup> et la connexion des différentes branches du squelette de l'ensemble des zones différences permettent ensuite de définir des images intermédiaires.

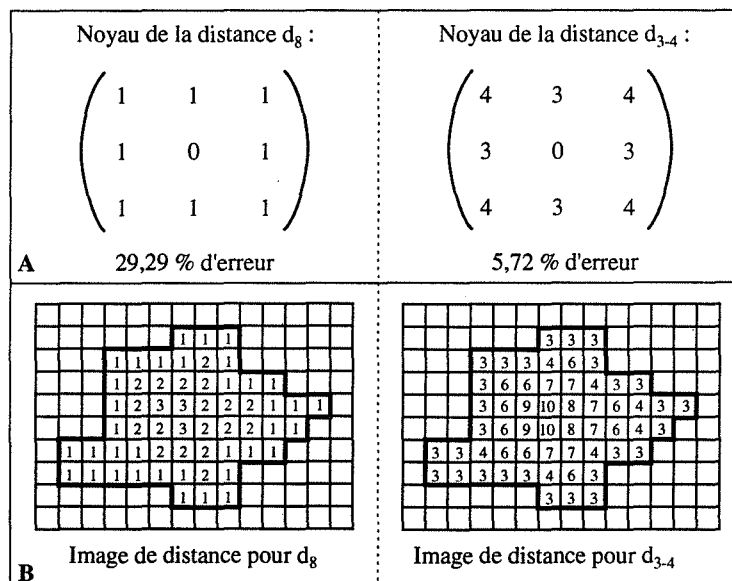
<sup>6</sup> Suppression des branches pendantes et non caractéristiques d'un squelette discret.



**Figure II.30 :** Extraction d'un squelette dans les pseudo zones différences de deux contours consécutifs, d'après [YOSH 92].

L'auteur empile ensuite l'ensemble des coupes épaisses pour définir l'objet de façon volumique.

Montanvert et al. utilisent une combinaison des images de transformée en distance de deux images initiales S1 et S2. La distance discrète utilisée est la distance de chanfrein.

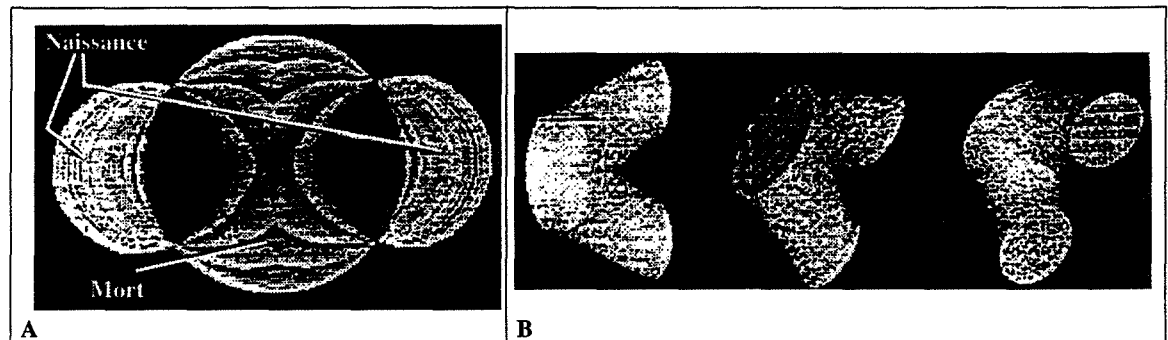


**Figure II.31 :** Comparaison entre les masques utilisés par la distance  $d_8$  et par la distance de chanfrein. La distance de chanfrein permet de diminuer l'erreur par rapport à la distance Euclidienne (figure A), et de définir des transformées en distance qui approximent mieux la distance Euclidienne.

Cette distance cherche à minimiser l'erreur avec la distance Euclidienne, qui est de  $\sqrt{2}$  pour une distance classique en 8 connexité, en ajustant les coefficients des différents masques utilisés (cf. fig. II.31A). La transformée en distance d'une image binaire associée à chaque pixel de la forme sa distance au point du fond le plus proche. Intuitivement cette transformée illustre

les différents stades de l'érosion d'une forme en fonction de la distance choisie (cf. fig. II.31B) [CHMO 91].

La méthode consiste à déterminer si les pixels des zones différences entre S1 et S2 sont présents à un stade donné du passage entre S1 et S2. Les pixels présents dans S1 mais absents dans S2 vont s'éteindre au fur à mesure du passage de S1 à S2, et ce en fonction de leur distance à S2 et à S1.



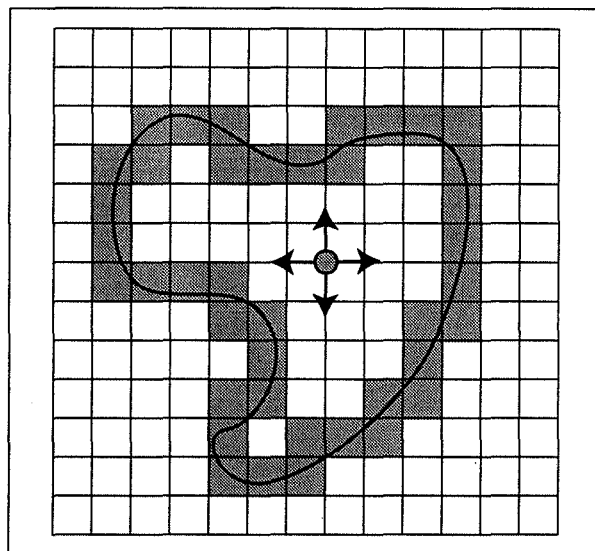
**Figure II.32 :** Résultats de la construction des coupes intermédiaires à l'aide de la distance de chanfrein (figure A), et empilement de ces coupes pour définir l'objet de manière volumique (figure B) (d'après [MOUS 93]).

Ceci est inversement vrai pour les pixels présents uniquement sur S2. Les auteurs extraient ainsi un certain nombre de sections intermédiaires (cf. fig. II.32A). Toutes les sections sont ensuite empilées afin de définir l'objet sous forme de voxels (cf. fig. II.32B).

Ces deux méthodes, qui s'appliquent sur des images binaires, ont l'avantage de gérer automatiquement les problèmes de topologie sans prendre en compte, a priori, de cas particuliers.

#### • *Interpolation sur des grilles régulières 3D*

Sous un angle de vue très différent, Doliazal [DOLL 94] a mis au point une technique de reconstruction basée sur l'interpolateur "Discrete Smooth Interpolation" (D.S.I.) de la plateforme logicielle pétrolière GOCAD [MALL 89]. Cet interpolateur ne peut agir que sur des points placés dans une grille régulière 3D, sans tenir compte de l'information topologique contenue dans les coupes. L'auteur propose donc de définir une grille de taille inférieure à la distance minimum entre deux points de la forme et de marquer les nœuds contenus à l'intérieur de chaque contour par un algorithme de type "pot de peinture" (cf. fig II.33). Les coupes sont éventuellement translatées pour être régulièrement espacées afin que chaque maille d'une section soit en contact avec une maille d'une autre section.



**Figure II.33 :** La détermination des nœuds situés à l'intérieur des contours permet de prendre en compte l'information topologique associée à la section de l'objet.

Ensuite l'interpolateur DSI est lancé sur ce modèle et fournit une surface triangulée lissée où les points originaux ne sont pas des sommets de la triangulation mais appartiennent aux différents triangles.

Cette approche diffère peu des méthodes de type volumique pour ce qui est de la phase de reconstruction. C'est seulement ensuite que l'interpolateur DSI permet d'obtenir la surface de l'objet.

Cette méthode peut facilement être adaptée pour accepter des informations supplémentaires (par exemple en géologie, des sondages ou des points de contact). Toutefois, cette technique ne conserve pas l'intégrité des données, ce qui peut être gênant dans certaines applications, et d'autre part elle se rapproche plus des applications de type maillage. Sa limitation tient d'abord au problème de la définition de la grille qui peut induire un volume de calculs important quand les données sont définies très finement, et ensuite à sa liaison étroite avec DSI qui diminue sa souplesse.

Une méthode similaire est proposée par Jones et al. [JOCH 94]. Les auteurs interpolent de manière linéaire les nœuds de la grille en fonction des points initiaux des contours. La technique proposée par Lorensen et Cline [LOCL 87] permet ensuite d'extraire la surface à l'intérieur de chacune des mailles en fonction de la nature de ces huit nœuds.

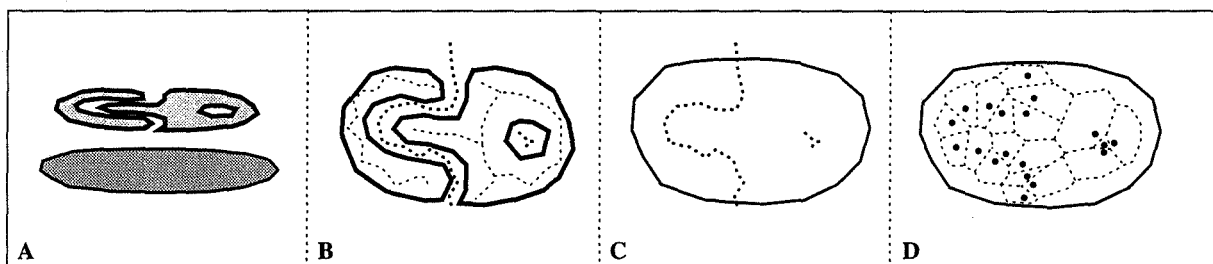
Wallin [WALL 91] utilise la même technique, mais sa méthode peut extraire directement des facettes non planes.

Toutes ces méthodes semblent traiter les problèmes de variation de formes et de topologie entre les sections, mais elles ne nous paraissent pas intuitives. En effet, à cause de la phase d'interpolation 3D au niveau de la grille, il n'est souvent pas possible de prévoir les

connexions qui seront réalisées sur les différents contours. En outre, elles nécessitent des volumes de stockage et de calcul beaucoup plus importants que les méthodes basées sur une triangulation directe.

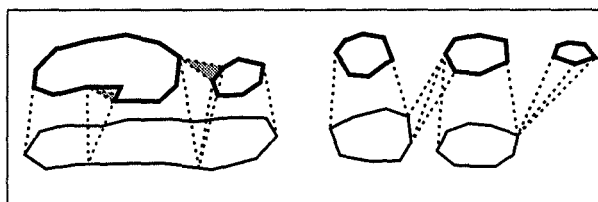
• *Construction surfacique et volumique par diagramme de proximité*

Boissonnat [BOIS 88] a proposé une méthode de reconstruction basée sur une triangulation de Delaunay 3D. Cette technique développée et appliquée au domaine médical par Boissonnat et Geiger [BOGE 92], [GEIG 93] permet de définir à la fois la surface et le volume des objets reconstruits. La première étape est la construction d'une approximation des diagrammes de Voronoï interne et externe de chacun des contours d'une section (cf. fig. II.34B) et le calcul de la triangulation de Delaunay de ces contours à l'aide du diagramme interne. Les points de chaque diagramme externe sont ensuite projetés sur la section voisine (cf. fig. II.34C), et la triangulation de ces contours est mise à jour en fonction de ces points (cf. fig. II.34D).



**Figure II.34 :** Construction des squelettes interne et externe des contours d'une section, et projection de ces points sur la section voisine, où le diagramme de Voronoï est mis à jour, d'après [GEIG 93].

Les tétraèdres sont ensuite définis en recherchant pour chaque triangle d'une section le point situé sur l'autre section dont la distance au cercle circonscrit au triangle est la plus faible. Les auteurs éliminent dans une phase de post-traitement les tétraèdres qui ont une arête et un sommet sur les deux sections et qui contribuent à des connexions non solides (cf. fig. II.35).



**Figure II.35 :** Stade d'élimination des connexions non solides, d'après [GEIG 93].

Le volume de l'objet est alors défini par l'ensemble des tétraèdres, alors que les faces externes de ces tétraèdres définissent la surface de l'objet.

La mise en correspondance des contours n'est pas seulement liée à un recouvrement des contours, mais aussi à un critère de proximité, ce qui étend les possibilités de la méthode, mais lorsqu'un contour n'a pas de correspondant sur la coupe voisine il n'est pas pris en compte. Cette méthode semble gérer correctement l'ensemble des situations difficiles, et traite de façon systématique tous les problèmes liés à la différence de topologie entre les formes.

Notons que le dernier chapitre de ce manuscrit est en partie consacré à une comparaison de trois méthodes de reconstruction 3D dont nous avons pu nous procurer les exécutable avec l'aimable autorisation des auteurs. Il s'agit des méthodes proposées par Dolliazal [DOLL 94] et par Geiger [GEIG 93], et de celle que nous proposons.



# **SECONDE PARTIE**



## **Exposé de la méthode de reconstruction 3D**



## - CHAPITRE III -

### Aperçu de la méthode de reconstruction 3D

Ce court chapitre expose les différentes étapes nécessaires dans notre méthode de reconstruction 3D et les justifie sans pour autant entrer dans les détails. Malgré le risque de répétition de certaines notions, nous avons jugé qu'une vue d'ensemble de notre approche serait utile à la compréhension des chapitres suivants.

#### III.1 - Introduction

Le but de ce travail est de reconstruire un objet tridimensionnel connu uniquement par des contours situés dans des plans parallèles. Nous allons maintenant préciser le cadre d'application de notre méthode.

- Les données initiales de la reconstruction 3D sont des formes polygonales qui représentent l'intersection de la surface de l'objet par les différents plans de coupes parallèles. Chaque forme  $F$  est une forme polygonale non auto-intersectante, éventuellement non connexe et trouée. Une forme  $F$  est composée de  $K$  contours qui sont représentés par une liste circulaire de points. L'application à la reconstruction de surfaces définies par des contours ouverts est abordée au chapitre VI.

- Nous considérons que la seule information disponible sur l'objet est celle qui est contenue dans chacune des sections.

- Notre but est de rechercher une description polyédrique triangulée de l'objet. Pour cela nous considérons que deux triangles de la surface de l'objet sont ou disjoints, ou partagent un sommet, ou alors partagent la totalité d'une arête.

- Nous imposons le respect des données initiales. Les sections par les plans de coupes initiaux dans l'objet une fois reconstruit, doivent être strictement identiques aux sections initiales, mais nous autorisons l'ajout de contours, ou de portions de contours, en dehors des plans de coupes initiaux.

Comme dans toute méthode de reconstruction 3D nous devons traiter les problèmes de mise en correspondance des contours et leur triangulation.

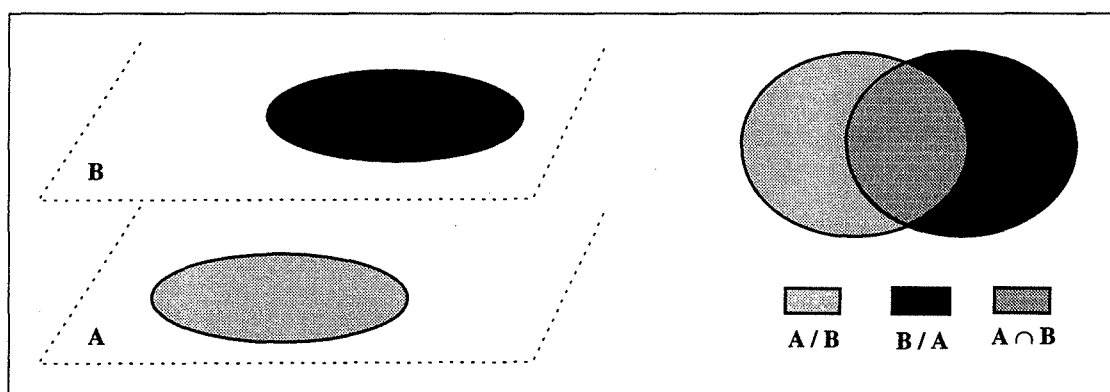
## III.2 - Les étapes de la méthode de reconstruction

### III.2.1 - Mise en correspondance des contours de deux sections

Sans information supplémentaire sur la forme de l'objet, nous pouvons raisonnablement considérer qu'une mise en correspondance par projection orthogonale donne un résultat convenable (cf. § II.3.1).

Dans cette optique, nous pouvons préalablement chercher à positionner au "mieux" les contours de deux sections consécutives. Si l'objet est décrit uniquement par un seul contour dans chaque plan, nous considérons alors que l'objet est "cylindrique" et qu'il est possible d'effectuer un certain nombre d'opérations (rotations, translations, ...) permettant de maximiser l'aire de l'intersection entre les deux contours. Dans le cas où les sections comportent plus d'un contour le positionnement est plus délicat à effectuer (cf. Chap. V).

La projection orthogonale de deux coupes consécutives SA et SB sur un même plan constitue donc la première étape. Cette projection dégage des zones d'intersection et de différence entre les contours de SA et ceux de SB (cf. fig. III.1).



**Figure III.1 :** Projection des deux sections sur un même plan, et extraction des zones différences.

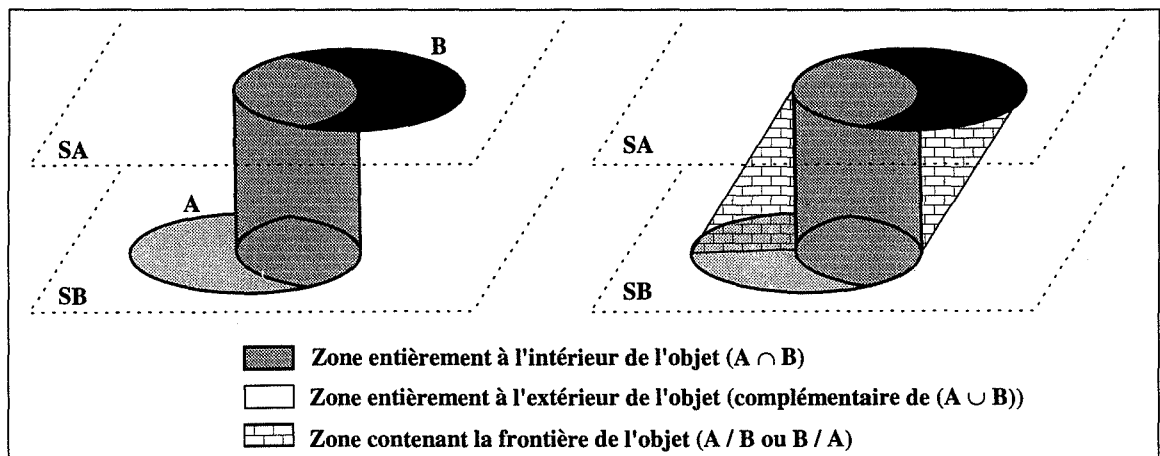
Remarquons que la projection des deux sections s'accompagne du calcul de l'intersection de leurs différents contours. Nous ne mettons donc pas directement en correspondance les contours, mais seulement des portions de ces contours.

Nous émettons les hypothèses suivantes (cf. fig. III.2) :

**Hypothèse 1** - Les volumes "cylindriques" ayant pour base les *zones d'intersection* entre les contours de SA et de SB, sont considérés comme appartenant strictement à *l'intérieur de l'objet*.

**Hypothèse 2** - Les volumes "cylindriques" ayant pour base les *zones complémentaires de l'union* entre les contours de SA et de SB, sont considérés comme appartenant strictement à *l'extérieur de l'objet*.

**Hypothèse 3** - La projection orthogonale de la *surface de l'objet* entre les sections SA et SB est entièrement comprise dans les *zones différences* entre les contours de SA et ceux de SB.



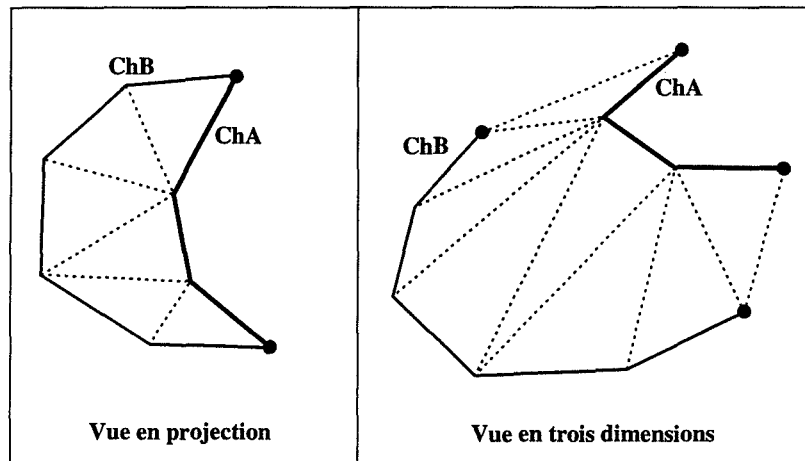
**Figure III.2 :** La surface de l'objet se projette entièrement dans les zones différences.

En d'autres termes, et suivant les hypothèses que nous avons émises, définir la surface de l'objet entre les sections SA et SB est équivalent à chercher une triangulation entre les contours appartenant à SA et à SB dans chacune des zones différences précédemment déterminées.

### III.2.2 - Recherche de la triangulation dans les zones différences

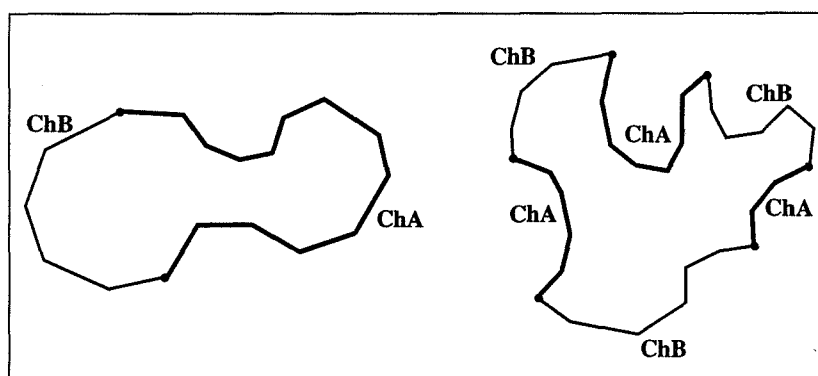
A ce stade, nous avons extrait des zones différences qui sont plus ou moins complexes. Chacune peut comporter un ou plusieurs trous, et peut être composée d'arêtes appartenant à SA et/ou à SB. Dans la suite de l'exposé, une suite continue d'arêtes, c'est-à-dire une chaîne ou une portion de contour, appartenant à un contour CA de SA, respectivement CB de SB, est notée ChA, respectivement ChB.

Supposons que nous traitons une zone différence simple, c'est-à-dire composée uniquement de deux chaînes ChA et ChB qui ont des formes similaires. Dans ce cas, il suffit d'appliquer n'importe quel algorithme permettant de trianguler deux portions de contours, comme celui proposé par Christiansen [CHSE 78], pour obtenir la surface reliant ChA et ChB (cf. fig. III.3).



**Figure III.3 :** Triangulation d'une zone différence simple composée de deux chaînes ChA et ChB.

Toutefois de tels algorithmes de triangulation ne peuvent s'appliquer directement dans des zones différences complexes. Par exemple si la forme différence contient deux portions de contours de formes très différentes (cf. fig. III.4A), ou si plus de deux portions de contours sont présentes dans la zone différence (cf. fig. III.4B), l'ajout de points supplémentaires est nécessaire pour respectivement éviter l'auto-intersection de la surface, et pour connecter convenablement les différents contours entre eux.

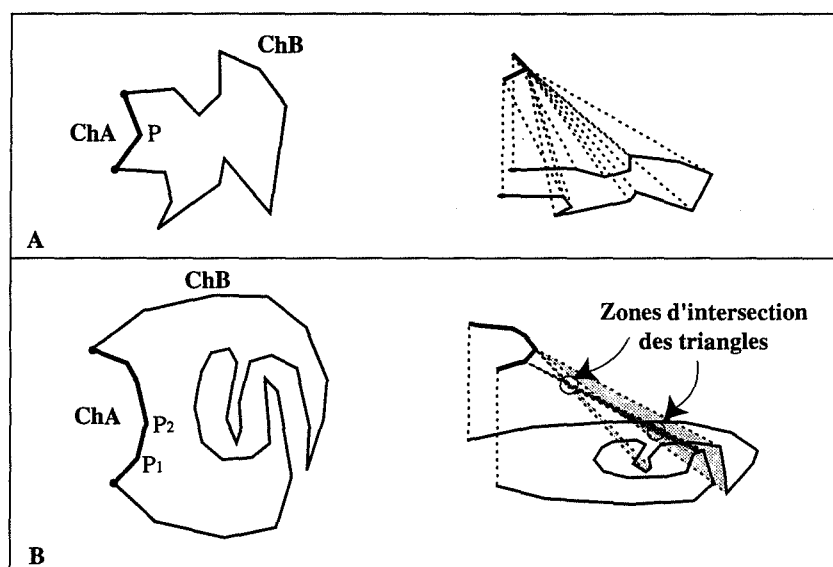


**Figure III.4 :** Exemple de zones différences complexes.

Il nous faut donc trouver un moyen élégant et efficace de générer la triangulation, et ce, quels que soient le type et la complexité de la zone différence.

### III.2.2.1 Génération des surfaces triangulées

Si, comme le déclarent Gitlin et al. [GIOR 93], une triangulation qui respecte la non-intersection entre les différents triangles est toujours possible entre un point et une chaîne polygonale sans l'ajout de points supplémentaires, première situation de la figure III.5 entre le point P et la portion de contour ChB, en revanche la triangulation du deuxième cas de la même figure, entre les points P1 et P2 et la portion de contour ChB, n'est pas satisfaisante puisqu'elle induit une auto-intersection de la surface.

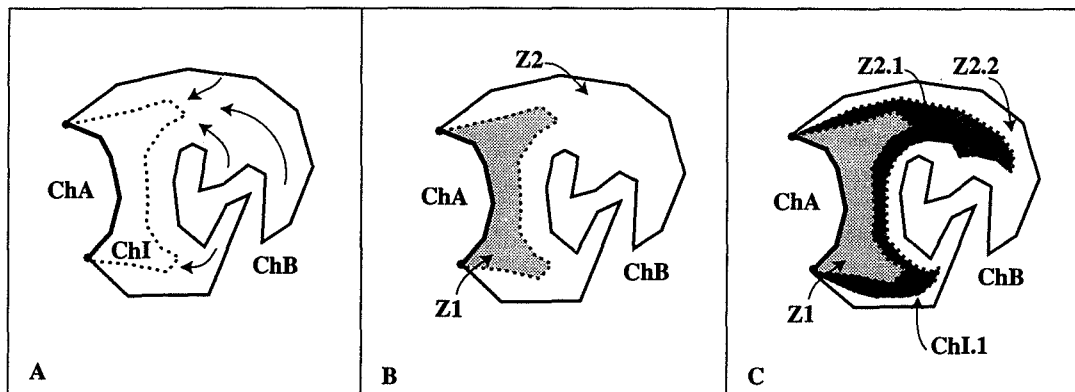


**Figure III.5 :** Exemple de triangulation de zones complexes. Dans le cas B, la surface s'auto-intersecte à deux endroits. Une simple triangulation ne suffit donc pas pour générer une surface correcte de l'objet.

Il n'est donc pas possible dans tous les cas, de relier directement les points d'une chaîne ChA avec ceux d'une autre chaîne ChB.

De manière informelle, l'idée directrice de notre méthode consiste à déformer la chaîne ChB en fonction de ChA, de telle façon qu'une triangulation entre la chaîne déformée et ChA respecte les principes énoncés au paragraphe III.1 et les hypothèses émises au paragraphe III.2.1. Le résultat de la déformation de la chaîne ChB en fonction de ChA est une chaîne intermédiaire interpolée, nommée ChI. Le fait de rajouter la portion de contour ChI divise la zone différence initiale Z en deux nouvelles zones polygonales simples notées Z1 et Z2. Les zones Z1 et Z2 sont respectivement composées des portions de contours ChA et ChI, et des portions de contours ChI et ChB. Nous reviendrons plus loin dans l'exposé sur la détermination du contour intermédiaire Ci et sur sa localisation spatiale.

Le problème de la triangulation de la zone différence initiale Z est alors divisé en deux sous-problèmes (cf. fig. III.6A). Il s'agit maintenant de trianguler les deux zones polygonales Z1 et Z2.



**Figure III.6 :** Construction de chaînes intermédiaires dans une zone différence afin de permettre une triangulation correcte des différentes portions de contours.

Notre approche est dichotomique. Si les deux nouvelles zones Z1 et Z2 ne peuvent, à l'instar de Z, être triangulées directement, nous relançons alors notre procédure dans chacune de ces zones, jusqu'à ce que toutes les zones obtenues puissent être directement triangulées. Notons que le fait de savoir si une zone peut ou ne peut pas être triangulée directement, est une information qui découle implicitement de la fonction de déformation choisie. Les différents tests d'arrêt qui peuvent être imaginés en fonction de l'application ou du choix de l'utilisateur sont explicités au chapitre VI.

Comme il est possible de le constater sur la figure III.6B, la triangulation de Z1 ne pose pas de difficultés. En revanche, la triangulation de Z2 reste difficile.

Il suffit alors d'introduire une nouvelle portion de contour intermédiaire ChI.1 entre les portions de contours ChI et ChB. Nous obtenons de nouveau deux zones polygonales Z2.1 et Z2.2, qui sont respectivement composées des portions de contours ChI et ChI.1, et des portions de contours ChI.1 et ChB (cf. fig. III.6C).

La triangulation des zones Z2.1 et Z2.2 s'effectue maintenant simplement, et la surface de l'objet ne s'intersecte plus. La procédure de reconstruction 3D est alors achevée.

**Le principe de notre démarche est donc de diviser récursivement une zone différence complexe à l'aide de portions de contours intermédiaires, jusqu'à ce que les zones résultantes puissent être triangulées simplement.**



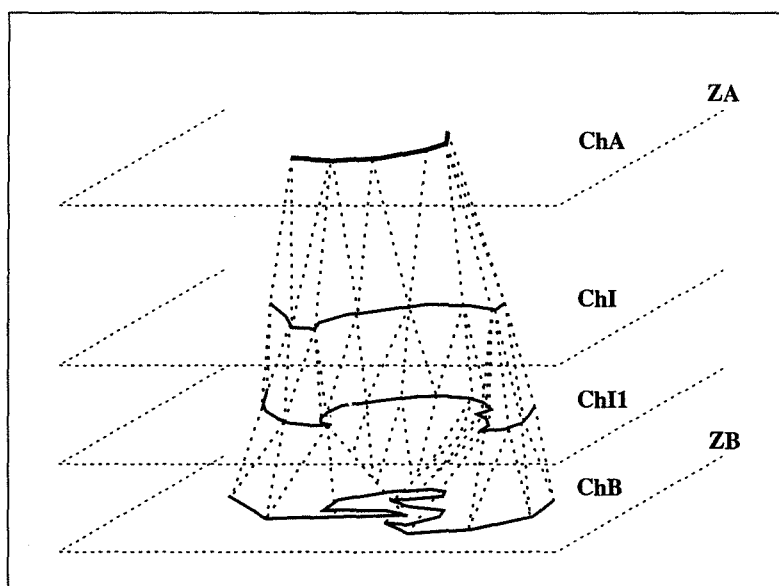
### III.2.2.2 Détermination du contour intermédiaire

Revenons sur le choix de la portion du contour intermédiaire ChI. Il s'agit de déterminer un graphe entièrement inclus dans la zone différence, qui permette de relier les deux points d'intersection entre les portions de contours ChA et ChB.

Le diagramme de Voronoï généralisé de la zone différence possède toutes ces caractéristiques et permet en plus de définir un contour à "égales distances" des arêtes de la zone différence (cf. Chap. IV). D'autre part, en raison de la structuration des bissecteurs en cellules connexes, ce diagramme induit une correspondance directe entre deux éléments quelconques de la zone Z, arêtes ou sommets, ce qui interdit de fait tout cas d'intersection avec d'autres bissecteurs de Z. La division d'une zone différence se fera donc par la construction d'un squelette issu de ce type de diagramme (cf. Chap. VI).

Il s'agit maintenant de savoir à quel endroit positionner cette portion de contour intermédiaire. Comme chaque élément de ChI est à mi distance de deux éléments appartenant à ChA et à ChB, nous choisissons de positionner par projection orthogonale le contour intermédiaire ChI sur un plan situé à mi distance des plans contenant les sections SA et SB.

Le résultat de la triangulation de l'exemple de la figure III.6 est illustré par la figure III.7.



**Figure III.7 :** Résultat de la triangulation de la zone différence. Les différents contours intermédiaires sont projetés à des altitudes intermédiaires à celles des 2 chaînes originales.

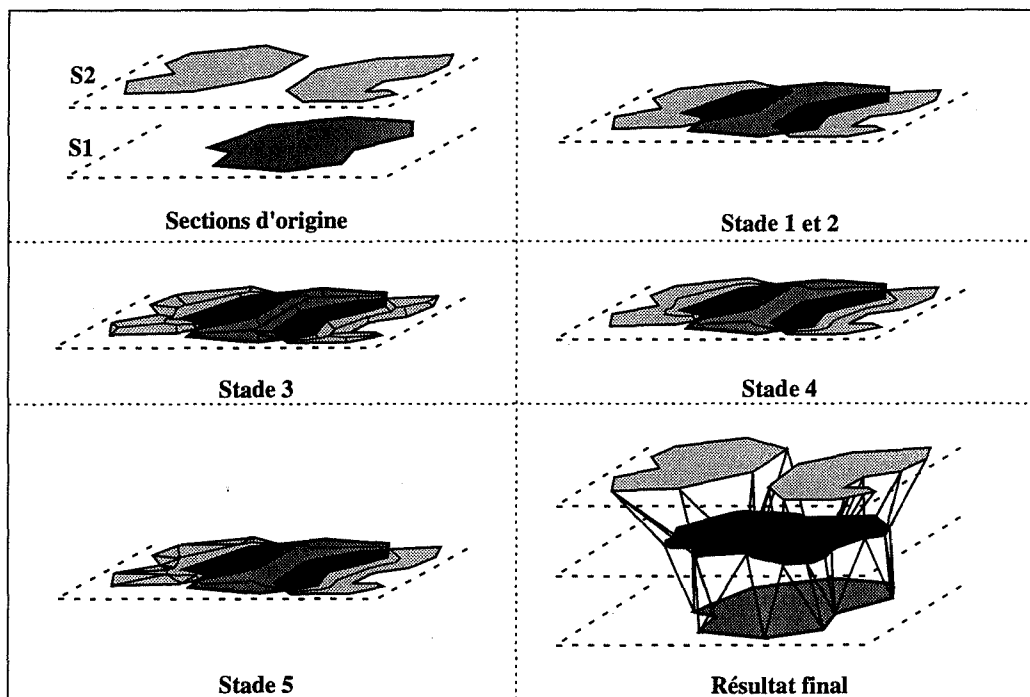
L'ajout des contours intermédiaires permet de contenir la projection de la triangulation de la surface de l'objet à l'intérieur des zones différences, et ainsi d'être conforme à l'hypothèse 3

que nous avons émise. Nous sommes ainsi certains de ne pas avoir de problèmes d'intersection de la surface de l'objet.

Cette même approche est employée quelle que soit la complexité des zones différences. Elle nous permet de reconstruire l'objet sans prendre en compte de cas particuliers en gérant de manière automatique tous les problèmes de topologie.

### III.3 - Algorithme général

La méthode de reconstruction 3D peut se schématiser de la façon suivante (cf. fig. III.8) :



**Figure III.8** : Illustration des principaux stades de la méthode de reconstruction 3D.

L'algorithme général est présenté ci-dessous :

```

Pour (chaque couple de sections S1 et S2)
1) | Projeter les deux formes sur un même plan et les positionner
   | PZD <- vide /* initialisation de la Pile des Zones Différences */
2) | Extraire les zones différences des deux formes et les empiler dans PZD
   | Tant que (PZD n'est pas vide)
   |   | Z <- Dépiler la première zone de différence de PZD
   |   | Squelettiser la zone différence Z
   |   | Si (Z peut être triangulée "simplement")
   |   |   | Trianguler Z
   |   | Sinon
   |   |   | Extraire les nouvelles zones ZZ1, ZZ2, ..., ZZn
   |   |   | Pour (Chacune de ces zones ZZi)
   |   |   |   | Empiler ZZi dans PZD
   |   |   |   | Fin de Pour
   |   |   | Fin de Si
   |   | Fin Tant que
   | Fin de Pour

```

La méthode comporte cinq étapes. Le point central de la méthode est la recherche des portions de contours intermédiaires et donc du squelette. Il est abordé dans le chapitre IV.

Les deux premiers stades, mise en correspondance des formes et extraction des zones différences, sont respectivement étudiés dans le chapitre V et VI. La section VI.2 explique comment déterminer les zones intermédiaires à partir de la squelettisation des zones différences (stade 4), alors que les problèmes liés à la triangulation de l'objet (stade 5) sont étudiés dans la section VI.3.



## - CHAPITRE IV -

# Diagrammes de Voronoï et réseau bissecteur

### IV.1 - Rappels sur les diagrammes de Voronoï

Les diagrammes de Voronoï (DV) sont largement utilisés dans de nombreux domaines et depuis de nombreuses années car ils permettent de résoudre efficacement différents problèmes. Citons entre autres la résolution des problèmes de proximité [PRSH 85], de détection de collision en robotique [ODSH 87], [ALYA 90], de génération de maillage pour calcul par éléments finis [GEOR 90], [SRNA 92], d'analyse d'images par région [KOCA 94], etc... Ils peuvent de plus être définis sous différentes métriques [LEE 80], [ARON 91], la plus commune étant, bien entendu, la distance euclidienne.

Notre but n'est pas de redire ici tout ce qui a été déjà dit à propos de ces diagrammes, mais de donner les bases indispensables à la compréhension de la suite de ce chapitre. Les lecteurs intéressés sont renvoyés aux nombreux articles ou ouvrages relatifs à ce sujet [PRSH 85], [KLWO 88], [KLEI 89], et en particulier à [AURE 91] et à [OKBO 92] qui fournissent une bonne synthèse sur les principaux types de diagrammes et leurs applications.

#### IV.1.1 - Diagramme de Voronoï entre points

Soit  $S_n$ , un ensemble  $p_1, \dots, p_n$  de  $n$  points (appelés *sites*) du plan Euclidien  $E^2$  en position générale, c'est-à-dire que trois sites ne peuvent être alignés et quatre sites ne peuvent se trouver sur le même cercle.

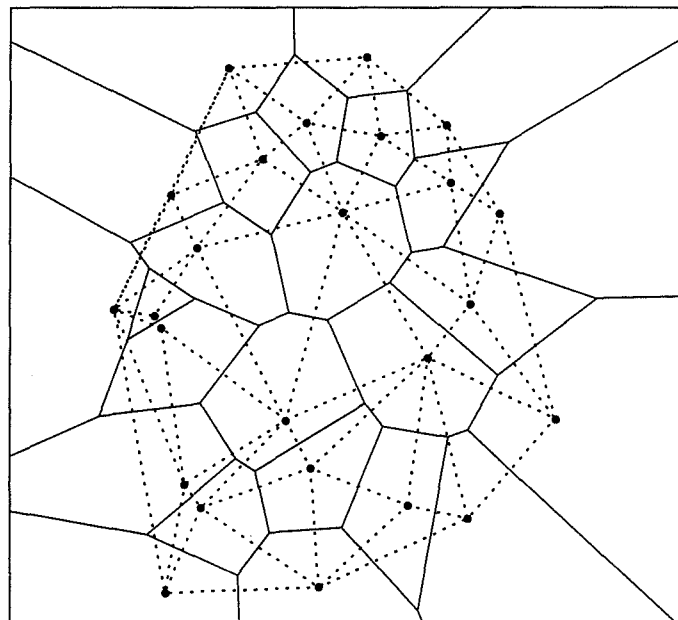
On appelle *cellule de Voronoï* de  $p_i$ , que l'on note  $V(i)$ , l'ensemble des points de  $E^2$  qui sont plus proches de  $p_i$  que de tous les autres sites de  $S_n$ .  $V(i)$  est une région polygonale convexe, éventuellement non bornée si  $p_i$  appartient à la frontière de l'enveloppe convexe de  $S_n$ . On trouve ainsi  $n$  cellules disjointes.

La frontière de deux cellules, appelée *arête de Voronoï*, est une portion du bissecteur entre ces deux sites. Cette arête de Voronoï supporte les points qui sont plus proches de ces

deux sites que de tous les autres sites de  $S_n$ . Sous la métrique euclidienne, les bissecteurs sont des portions de médiatrices entre les différents sites. Chaque arête de Voronoï est associée à exactement deux cellules de Voronoï.

Le point de rencontre de trois médiatrices, appelé *sommet de Voronoï*, est le point qui est à égale distance de ces trois sites et qui est le plus proche de ces trois sites que de tous les autres sites de  $S_n$ .

Le *diagramme de Voronoï* de  $S_n$ , noté  $DV(S_n)$ , est l'union de toutes les cellules des sites de  $S_n$  (cf. fig. IV.1). Comme le diagramme de Voronoï est un graphe planaire, la relation d'Euler permet de montrer qu'il comporte au plus  $(3n - 6)$  arêtes et  $(2n - 5)$  sommets si chaque sommet est de degré trois, avec  $n \geq 3$ .



**Figure IV.1 :** Diagramme de Voronoï et Triangulation de Delaunay d'un ensemble de points.

Si l'on relie chaque couple de sites dont les cellules partagent une arête de Voronoï, on obtient le graphe dual du  $DV(S_n)$ , appelé *triangulation de Delaunay*. Chaque sommet de Voronoï représente un triangle, et est le centre du cercle circonscrit aux trois sites, sommets de ce triangle.

## IV.1.2 - Diagramme de Voronoï généralisé et axe médian

Dès les années soixante, les notions de *squelette* et d'*axe médian* apparaissent dans la littérature comme outils de description de formes complexes [BLUM 67, 73, 78]. Ce sont des généralisations du diagramme de Voronoï où les sites ne sont plus des points mais des segments de droites et des sommets concaves [KIRK 79], [LEDR 81], [AMBO 90]. L'extension aux contours polygonaux, ou *diagrammes de Voronoï généralisés*, a elle aussi fait l'objet de nombreux travaux [MONT 68, 69], [PREP 77], [LEE 82], [SRNA 87], [MESA 87], [YAP 87], [HUCH 89], [YARO 90].

### IV.1.2.1 - Diagramme de Voronoï généralisé

Soit  $C_n$ , une forme polygonale simple (non auto-intersectante) du plan euclidien  $E^2$  composée de  $(n + k)$  éléments,  $n$  arêtes  $e_1, \dots, e_n$  et  $k$  sommets concaves. Soit  $q$ , un élément de  $C_n$ .

On appelle *cellule interne de Voronoï généralisé* de  $q$ , notée  $VG_i(q)$ , l'ensemble des points, appartenant à l'intérieur de  $C_n$ , qui sont au moins aussi proches de  $q$  que de tous les autres éléments de  $C_n$ . Une cellule  $VG_i(q)$  est limitée par un ensemble de bissecteurs, ou d'arêtes de Voronoï, qui sont les points à la même distance de deux éléments  $q$  et  $q'$ .

Une arête de Voronoï, bissecteur de deux éléments de  $C_n$ , est associée à exactement deux cellules, et deux cellules ne peuvent partager plus d'une arête de Voronoï. Dans le cas du diagramme de Voronoï généralisé les *bissecteurs* ou les arêtes de Voronoï ne sont pas uniquement des segments, mais peuvent être (cf. fig. IV.2) :

- la normale à une arête issue du sommet concave adjacent
- une portion de médiatrice entre deux sommets concaves
- une portion de parabole entre un sommet concave et une arête non adjacente sur  $C_n$
- une portion de bissectrice entre deux arêtes

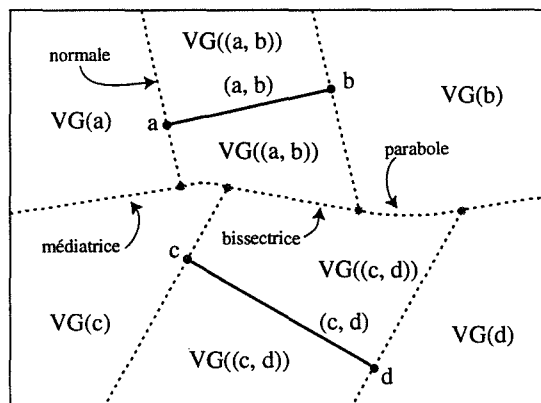
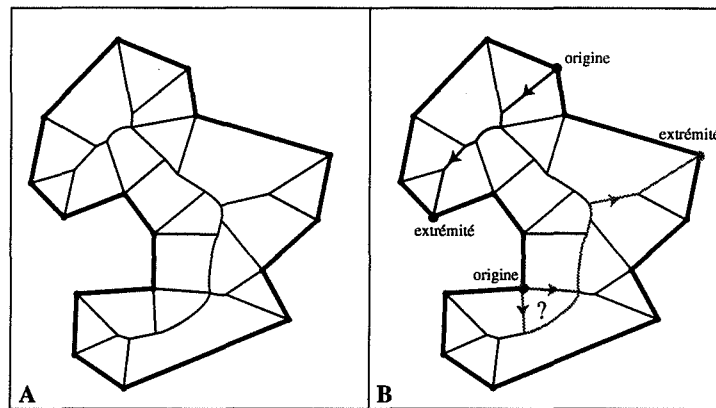


Figure IV.2 : Les différents types d'arêtes de Voronoï entre des segments.

Les sommets de Voronoï généralisé sont les points de rencontre d'au moins trois bissecteurs et sont donc situés à égale distance de ces éléments.

L'ensemble des points situés à égale distance d'au moins deux éléments de  $C_n$ , et qui sont plus proches de ces deux éléments que de tous les autres éléments de  $C_n$ , forme le *diagramme de Voronoï généralisé interne* de  $C_n$ , noté  $DVGi(C_n)$  [KIRK 79]. Un tel diagramme (cf. fig. IV.3A) comporte  $(n + k)$  cellules, chacune étant relative à un élément de  $C_n$ . Une définition similaire peut être donnée pour le diagramme de Voronoï généralisé externe de  $C_n$ .



**Figure IV.3 :** Diagramme de Voronoï interne d'un polygone, et recherche de chemin entre deux sommets à travers le diagramme. Chaque sommet concave induit deux possibilités de chemin. (D'après [LEE 82] modifié).

Notons que dans le cas de polygones convexes toutes les arêtes de Voronoï sont des portions de bissectrices. Si  $C_n$  comporte des sommets concaves, alors le diagramme de Voronoï généralisé de  $C_n$  peut ne pas avoir la même complexité algébrique que  $C_n$ , puisque dans ce cas, il peut comporter des portions de parabole.

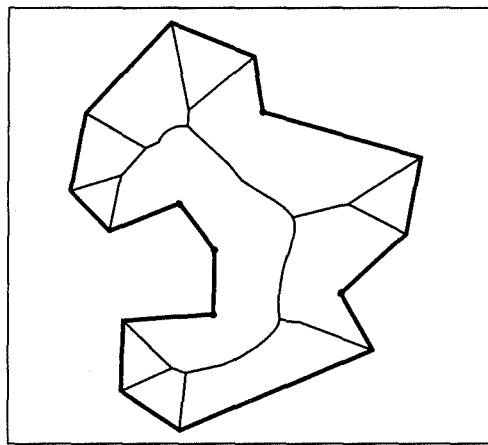
Le diagramme de Voronoï généralisé de  $C_n$  est un graphe planaire qui a au plus  $(2 * (n + k) - 3)$  arêtes et  $(n + k - 2)$  sommets. Quels que soient deux sommets de  $C_n$ , il existe toujours un chemin qui emprunte uniquement les arêtes du diagramme de Voronoï généralisé de  $C_n$ , et qui relie ces deux points. Ce chemin est unique si le polygone ne possède pas de trous et si les sommets à relier sont convexes (cf. fig. IV.3B).



#### IV.1.2.2 - Axe médian

L'axe médian de  $C_n$  est défini comme l'ensemble des points internes à  $C_n$  qui sont équidistants d'au moins deux points de la frontière de  $C_n$  et qui sont plus proches de ces points que de tous les autres points de la frontière de  $C_n$ .

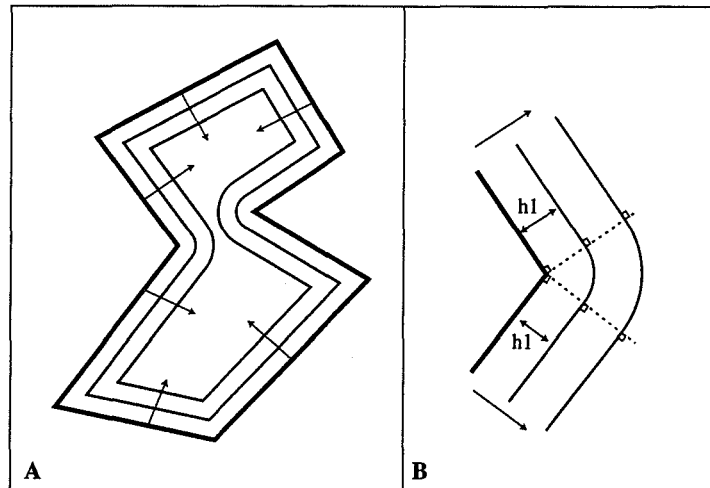
Il peut être obtenu à partir du diagramme de Voronoï généralisé de  $C_n$ , en enlevant les arêtes de Voronoï issues des sommets concaves (cf. fig. IV.4). Notons que dans le cas d'un polygone convexe, l'axe médian et le diagramme de Voronoï généralisé sont identiques [LEE 82].



**Figure IV.4 :** Axe médian du polygone dont le diagramme de Voronoï est illustré figure IV.3. L'axe médian ne contient aucun bissecteur du diagramme de Voronoï issu des sommets concaves.

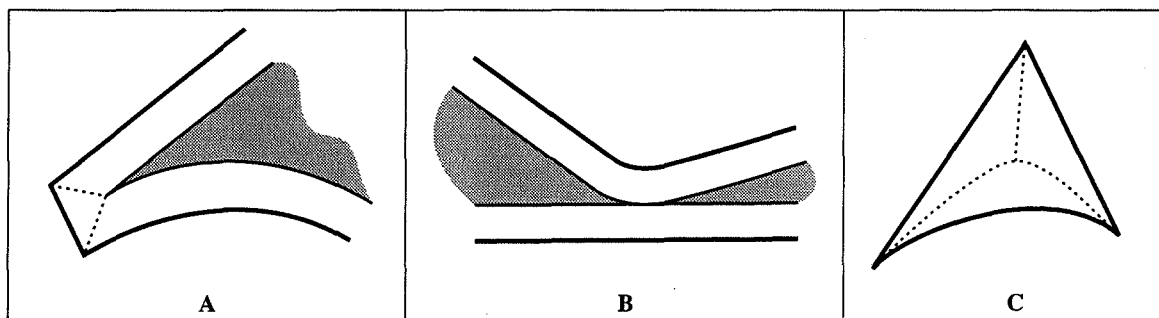
Montanari [MONT 69] propose une méthode de construction de l'axe médian d'un polygone par propagation successive d'un front d'onde de l'extérieur vers l'intérieur du polygone (cf. fig. IV.5A). Un front d'onde à un temps  $t$  est une fonction de la distance au contour initial. Il peut être entièrement défini en précisant l'ordre de ces différents *composants* et leurs équations respectives. Les composants mis en jeu durant la propagation sont soit des segments de droite, soit des arcs de cercle au niveau des sommets concaves (cf. fig. IV.5B). Notons que l'auteur approxime tous les sommets concaves initiaux par des arcs de cercle infinitésimaux. De cette manière les fronts d'onde ne comportent jamais de sommets concaves.

Tous les éléments mis en jeu pour un front d'onde donné sont à la même distance  $h$  du polygone initial.



**Figure IV.5 :** Détermination de l'axe médian d'un polygone par propagation vers l'intérieur de la forme.

Le point de jonction de deux composants du front d'onde, qui sont tous deux issus de deux éléments consécutifs sur le polygone, est appelé point de suture. Le premier point d'intersection entre deux composants, relatifs à deux éléments qui ne sont pas consécutifs sur le polygone, est appelé point de rupture.



**Figure IV.6 :** Illustration des différents types de points de rupture; intermédiaire, initial et final.

L'auteur montre qu'un front d'onde n'est modifié durant la propagation que lorsqu'il rencontre un point de rupture. Les points de rupture "intermédiaires", qui n'impliquent que des segments de droite, modifient le front d'onde en diminuant son nombre d'éléments (cf. fig. IV.6A). Lorsqu'un point de rupture "initial", défini comme un point de rupture impliquant au moins un élément de type arc de cercle, est rencontré, le front d'onde est alors déconnecté (respectivement connecté) si les deux éléments responsables du point de rupture appartiennent (respectivement n'appartiennent pas) au même front d'onde (cf. fig. IV.6B). La propagation s'achève lors de la rencontre d'un point de rupture "final". Un point de rupture final, situé sur un front d'onde à l'instant  $t$ , est défini comme le point de rencontre de l'ensemble des composants issus du front d'onde à l'instant  $t - \Delta t$  (cf. fig. IV.6C).

La propagation se poursuit ainsi de proche en proche jusqu'au moment où plus aucun espace n'est utilisable à l'intérieur du polygone. Les différents sommets du graphe qui décrit l'axe médian sont alors matérialisés par l'ensemble des points de rupture rencontrés durant la propagation du front d'onde.

#### IV.1.3 - Approximations du diagramme de Voronoï généralisé

Dans le cadre de notre méthode (cf. Paragraphe III.2.2.2) l'utilisation du diagramme de Voronoï généralisé paraît tout à fait indiquée puisqu'il s'agit d'un graphe planaire qui permet de relier deux sommets quelconques d'un polygone par une chaîne intermédiaire. Toutefois, dans le contexte de notre application, l'utilisation du diagramme de Voronoï généralisé présente trois limitations importantes :

- Le diagramme de Voronoï peut comporter des portions de parabole (cf. fig. IV.3A). Or les contours interpolés situés dans des plans intermédiaires servent de support à la triangulation finale de l'objet. Il est donc nécessaire que les éléments de ces contours soient des segments linéaires pour que tous les triangles construits soient plans.

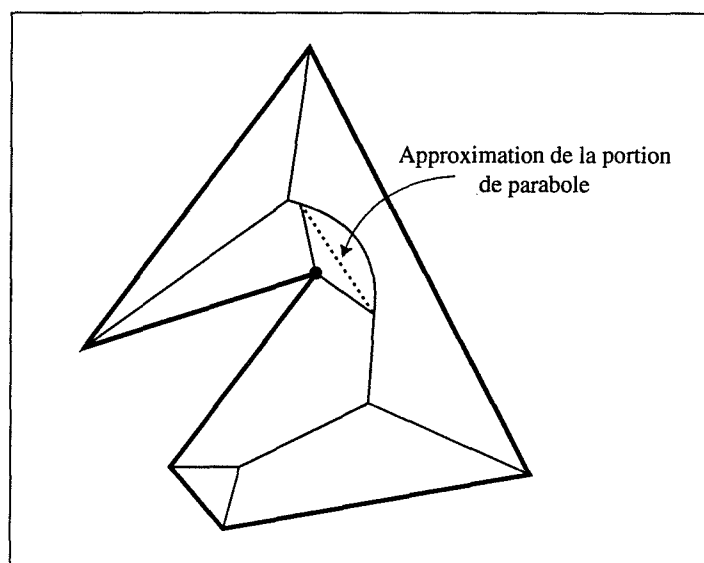
- D'autre part, nous voulons être en mesure de nous servir des contours interpolés pour relancer de façon dichotomique l'interpolation dans les zones complexes. Il est donc important que ces contours intermédiaires soient polygonaux afin de pouvoir calculer un nouveau contour interpolé à l'aide d'une "squelettisation" dans chaque zone différence.

- Enfin, dans le cas du diagramme de Voronoï, le chemin reliant un sommet concave à un autre sommet n'est pas unique puisqu'on peut utiliser indifféremment les deux normales au sommet concave. Même si le cas de points d'intersection formant un sommet concave n'est pas a priori très courant (cas de deux sommets confondus lors de la recherche des intersections), il doit quand même être pris en compte (cf. fig. IV.3).

Pour toutes ces raisons, nous ne pouvons pas utiliser directement le diagramme de Voronoï généralisé.

Plusieurs auteurs ont proposé des solutions pour diminuer la complexité algébrique du diagramme de Voronoï généralisé.

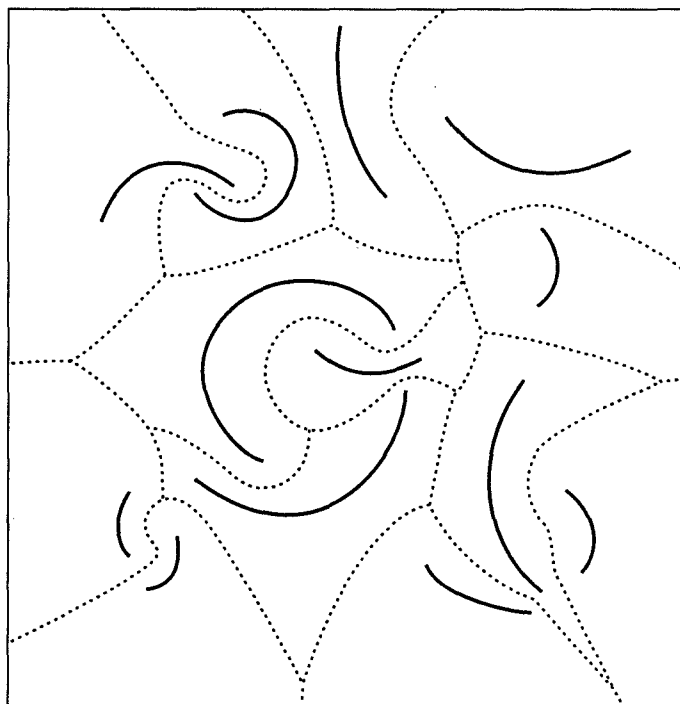
Srinivasan et al. [SRNA 92] proposent de remplacer simplement les portions de paraboles par des segments de droite reliant les deux points extrémités de la parabole. Dans ce cas, plus la "concavité" du sommet est grande, et plus le contour intermédiaire est proche du sommet concave (cf. fig. IV.7).



**Figure IV.7 :** Approximation des portions de parabole par un segment linéaire.

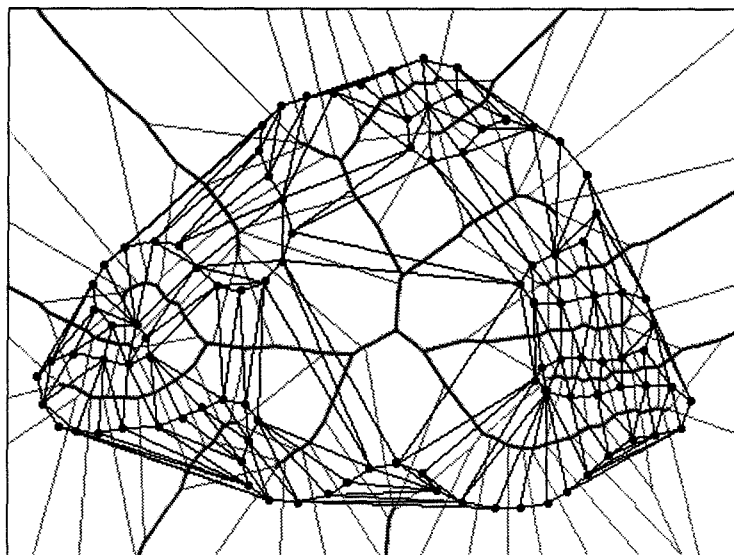
Cette méthode, qui a l'avantage d'être simple à mettre en œuvre, ne permet pas de lever l'indétermination sur le chemin à emprunter au niveau des sommets concaves.

Une autre solution [BRAL 91], [SUGI 93], consiste à augmenter par sur-échantillonnage le nombre de points de chaque élément de la forme à squelettiser, et à approximer l'axe médian de la forme par le diagramme de Voronoï de cet ensemble de points (cf. fig. IV.8).



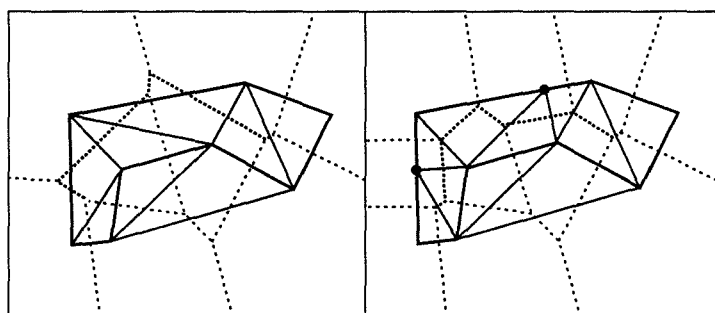
**Figure IV.8 :** Approximation de l'axe médian de segments non-linéaires par sur-échantillonnage des points et calcul du diagramme de Voronoï de ces points. (D'après [SUGI 93]).

Cette méthode s'inspire de celle proposée par Schmitt [SCHM 88], où l'axe médian est approximé par le centre des cercles circonscrits aux triangles de la triangulation de Delaunay de l'ensemble des points (cf. fig. IV.9).



**Figure IV.9 :** Approximation de l'axe médian d'un polygone à partir de la triangulation de Delaunay de ses sommets. Les centres des cercles circonscrits aux triangles correspondent aux sommets de l'approximation de l'axe médian.

L'auteur montre que l'approximation converge effectivement vers l'axe médian quand on augmente l'échantillonnage des éléments de la forme. Ces méthodes s'appliquent à des formes dont les éléments peuvent être curvilignes, et permettent d'obtenir des bissecteurs qui sont tous linéaires. Toutefois, elles restent difficilement applicables à cause du nombre important de points à rajouter à la forme initiale. Pour cette raison, Geiger [GEIG 93] propose de construire le diagramme de Voronoï du polygone et de ne rajouter qu'un faible nombre de points sur la frontière, ce qui est suffisant pour contenir l'axe médian à l'intérieur de la frontière polygonale (cf. fig. IV.10).

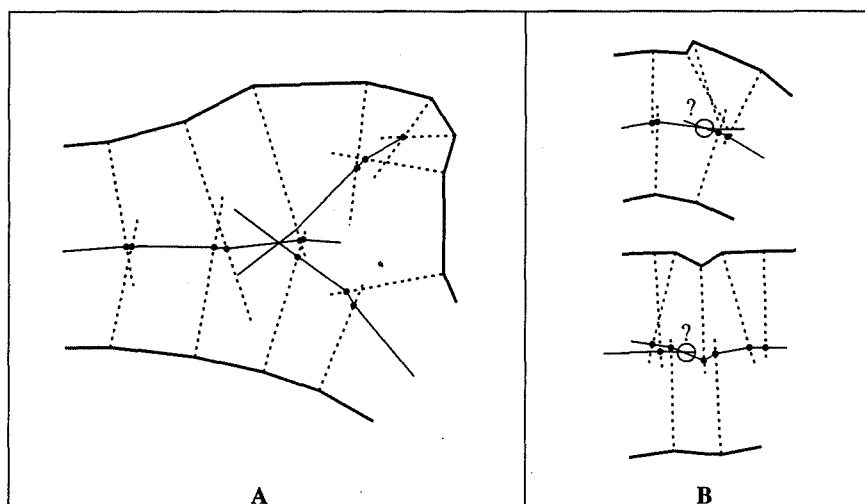


**Figure IV.10 :** Approximation de l'axe médian par ajout de points sur la frontière du polygone. Sur cet exemple deux points suffisent à contenir le squelette à l'intérieur de la forme. (D'après [GEIG 93]).

Ceci permet de diminuer le nombre de points de sur-échantillonnage, mais cette méthode fournit une approximation assez lointaine de l'axe médian réel.

Comme toutes ces méthodes n'approximent pas directement le diagramme de Voronoï, mais l'axe médian de la forme, elles ne permettent pas de conserver la notion de cellules relatives à un élément du polygone. A l'instar de la méthode de Srinivasan, les bissecteurs issus des sommets concaves ne sont donc pas directement utilisables.

Bookstein [BOOK 79] propose une méthode de construction d'un graphe uniquement constitué de segments de droite et qui approxime l'axe médian d'un polygone. L'auteur utilise les bissectrices entre les différentes arêtes du polygone, et les combine de proche en proche pour décrire une approximation de l'axe médian du polygone (cf. fig. IV.11).



**Figure IV.11 :** Méthode de construction du graphe linéaire proposé par [BOOK 79]. La figure A illustre la connexion de trois branches du squelette. Lorsque les bissecteurs s'intersectent avant de rencontrer une branche de l'axe médian, le graphe perd sa continuité (figure B).

En conservant dans le graphe final les bissectrices issues des sommets du polygone, on obtient une approximation du diagramme de Voronoï. Le graphe résultant n'est pas toujours connexe (cf. fig. IV.11B) et ne possède pas la même structure et donc les mêmes possibilités que celles offertes par le diagramme de Voronoï généralisé. D'autre part ce graphe n'a pas de fondement théorique.

D'autres auteurs ont développé des méthodes qui permettent d'approximer soit le diagramme de Voronoï généralisé, soit l'axe médian d'un polygone. Comme elles se basent sur des données initiales discrètes, elles ne sont pas évoquées ici.

Nous le voyons, aucune de ces méthodes d'approximation ne permet de répondre à la totalité de nos exigences. Nous devons donc nous orienter vers l'utilisation d'un autre type de solution.

## IV.2 - Le réseau bissecteur

Nous recherchons un diagramme de Voronoï généralisé appliqué à une forme polygonale sous la  $L_2$  métrique tel que tous ses éléments constitutifs soient linéaires. Ceci est bien évidemment sans solution.

Plutôt que de nous servir d'une approximation, nous choisissons d'employer une simplification du diagramme de Voronoï généralisé que nous appelons le *réseau bissecteur*. Ce type de diagramme a été proposé par Brassel et al. [BRHE 84]. Il est utilisé par cet auteur et par [CROM 87] pour partitionner des aires planes dans des applications géographiques, alors que [CADO 88], [CANN 87] l'utilisent pour résoudre les problèmes de planification de trajectoires en robotique.

Ce diagramme a, nous le verrons, la même structure que le diagramme de Voronoï généralisé dans le sens où chaque élément, ici les arêtes seulement, possède une cellule unique et où chaque cellule n'est relative qu'à une seule arête. C'est bien évidemment en raison de cette structuration du polygone que le réseau bissecteur est intéressant en tant qu'outil d'interpolation (cf. Chap. III). Son principal avantage par rapport au DVG est que sa complexité algébrique est la même que celle des éléments qui permettent de le calculer. Ainsi, il ne comporte que des portions de bissectrices entre les différentes arêtes du polygone, et les cellules sont toutes relatives à ces seules arêtes.

Brassel et al. décrivent assez simplement ce diagramme et fournissent un algorithme en  $O((n * n_c)^2)$  où  $n$  et  $n_c$  sont respectivement le nombre de sommets et de sommets concaves du polygone. Les auteurs s'appuient pour la démonstration de leur algorithme sur un postulat qui n'est pas exact. Ils définissent en effet un sommet du réseau bissecteur d'un polygone  $P$  comme : " le point à égale distance et le plus près d'un triplet d'arêtes de  $P$  ou de leur droite support " (§ 2, p. 120). Cette définition est erronée et conduit forcément l'algorithme à donner un faux résultat dans des situations délicates.

D'ailleurs, nous ne pouvons pas donner maintenant de définition précise du réseau bissecteur parce qu'il ne s'appuie pas sur une vraie notion de distance. La définition que nous donnerons au paragraphe IV.2.2 découle de la notion de croissance cristalline appliquée à un

espace polygonal. Ainsi l'appartenance d'un point à la cellule d'une arête ne peut pas, contrairement au DVG, être déterminée avant la construction au moins partielle du réseau.

C'est pourquoi nous entendons donner dans la section suivante une caractérisation complète du mécanisme de croissance cristalline qui va nous permettre par la suite de définir complètement le réseau bissecteur et d'en justifier les algorithmes de construction.

### IV.2.1 - Modèle de croissance cristalline

Pour illustrer notre propos, nous suggérons de faire déplacer, à partir de la frontière de chacun des contours d'une forme polygonale  $F$ , des contours parallèles vers l'intérieur de la forme  $F$ . Cette propagation peut, dans un cas 3D, être assimilée à la croissance d'un cristal perpendiculairement à ses faces.

En partant d'un germe cristallin initial, tout cristal croît en gardant des faces parallèles. Si la vitesse de croissance est homogène dans toutes les directions et si la croissance se déroule simultanément, les points de même âge se situent tous sur des faces parallèles. Chacune de ces faces est alors à la même distance  $h$  d'une des faces du germe initial. Ces faces sont parallèles à un nombre limité de directions qui dépendent de l'agencement du réseau cristallin.

Notons que le modèle que nous voulons utiliser en 2D n'est qu'une approximation d'une vraie croissance cristalline car il existe très peu de chance pour que le polygone de départ possède les mêmes caractéristiques de symétrie qu'une section d'un germe cristallin. Néanmoins, nous considérons que les différents contours parallèles que nous construisons représentent les différentes étapes de la croissance d'une forme  $F$ , chaque arête d'un contour parallèle étant une arête parallèle à une arête initiale de la forme  $F$ .

Le terme adéquat pour désigner cette croissance est sans doute la "rétraction" ou la "contraction" de la forme  $F$ . Toutefois comme cette "croissance" peut être aussi bien effectuée vers l'intérieur ou vers l'extérieur de la forme  $F$ , nous conserverons le terme de croissance et nous nommerons ces différentes étapes sous le terme de "fronts de croissance" ou "contours parallèles à la distance  $h$  de  $F$ ".



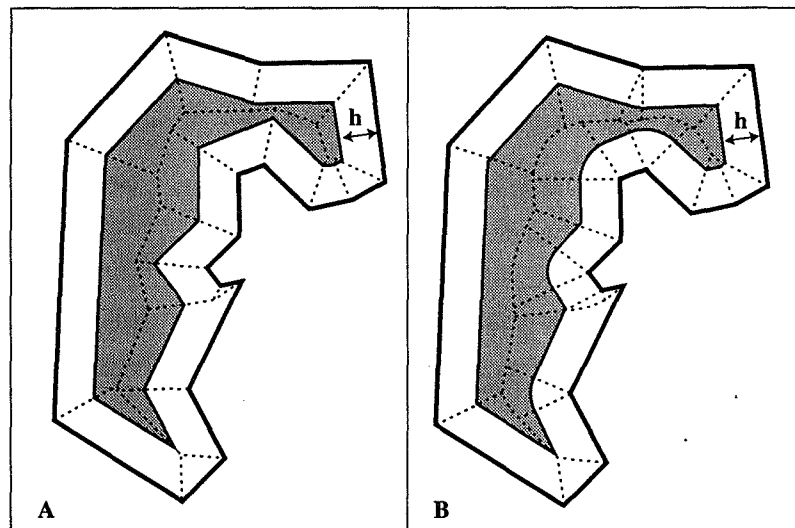
#### IV.2.1.1 - Croissance cristalline et contours parallèles

Par analogie avec la croissance cristalline, à chaque étape de la croissance de la forme  $F$ , tous les points appartenant au "*front de croissance à la distance  $h$  de  $F$* " sont de même âge. La forme  $F$  peut donc être considérée elle-même comme un front de croissance où l'âge de chacune des arêtes du front de croissance est nulle (ou dont la distance à  $F$  est nulle).

Un front de croissance (ou une "forme parallèle") à une distance  $h$  donnée de  $F$  se caractérise par (cf. fig. IV.12A) :

- le nombre de ses composantes connexes (ou le nombre de ses contours parallèles),
- le nombre et l'ordre de ses éléments, chaque élément étant une arête strictement parallèle (parallèle et de même sens) et à la distance  $h$  d'une arête de la forme initiale.

Pour une distance  $h$  quelconque, on considère que le front de croissance à la distance  $h$  de  $F$  est le résultat d'une fonction  $G(F, h)$  qui associe à  $F$  l'ensemble des éléments parallèles qui peuvent être construits à partir des arêtes de  $F$ .



**Figure IV.12 :** Un front de croissance à la distance  $h$  du polygone (figure A), et un front d'onde à la distance  $h$  de ce même polygone (figure B).

Cette propagation (cf. fig. IV.12A) diffère fondamentalement des fronts d'onde de Montanari [MONT 69] (cf. fig. IV.12B) dans la mesure où chaque élément est ici un segment de droite strictement parallèle à une arête de la frontière de  $F$ .

De plus, le modèle de croissance cristalline permet de conserver les angles entre les différentes arêtes adjacentes de deux fronts de croissance consécutifs.

D'une manière analogue au modèle cristallin, la construction des contours parallèles obéit aux deux règles suivantes :

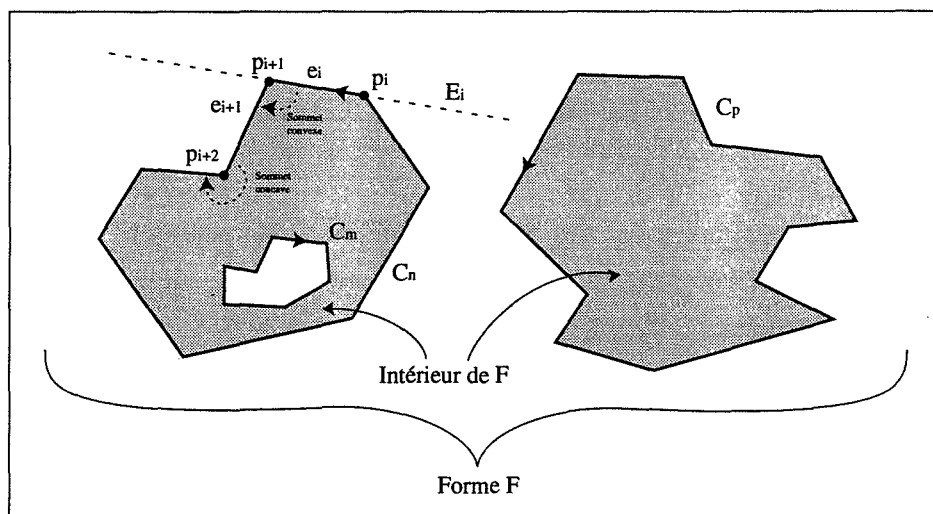
- 1- Les éléments non consécutifs d'un front de croissance ne peuvent s'intersecter, ou en d'autres termes, le contour parallèle n'est pas auto-intersectant.
- 2- Le front de croissance à la distance  $h_2$  de  $F$ , noté  $G(F, h_2)$ , où  $h_2$  est strictement supérieure à  $h_1$ , peut être défini par croissance d'une distance  $h$ , où  $h = h_2 - h_1$ , à partir du front de croissance  $G(F, h_1)$  à la distance  $h_1$  de  $F$  :

$$G(F, h_2) = G(G(F, h_1), h_2 - h_1).$$

#### IV.2.1.2 - Notations et définitions

• *Définition 1* : Soit  $F$ , une forme polygonale simple, éventuellement non connexe et trouée, composée de  $k$  contours. Les contours externes sont orientés dans le sens anti-horaire et les trous dans le sens horaire. L'intérieur de  $F$  est donc toujours à gauche des arêtes de  $F$  (cf. fig. IV.13).

• *Définition 2* : Soit  $C_n$ , un contour polygonal de  $F$  composé de  $n$  arêtes  $e_1, \dots, e_n$ , alors  $p_i$  est le sommet de  $C_n$  séparant  $e_{i-1}$  et  $e_i$ , et  $E_i$  est la droite support de l'arête  $e_i$ . Le sommet  $p_i$  est convexe (respectivement concave) si  $p_{i+1}$  est à gauche (respectivement à droite) de  $E_i$  en fonction du sens imposé par  $e_i$  (cf. fig. IV.13). Si trois sommets sont alignés, le sommet intermédiaire est supprimé.



**Figure IV.13** : Exemple d'une forme  $F$  composée de trois contours orientés, dont un trou.

• **Définition 3 :** On note  $G(C_n, h)$  le contour parallèle à la distance  $h$  de  $C_n$ . Si la forme  $F$  comporte plusieurs contours, alors  $G(F, h)$  représente l'ensemble des contours parallèles à la distance  $h$  des contours de  $F$ . Dans la suite de l'exposé, une arête valide du front d'onde  $G(C_n, h)$  qui est parallèle à une arête  $e_i$  de  $F$  est notée  $e'_i$ , et sera désignée par le terme "arête parallèle et à la distance  $h$  de  $e_i$ ".

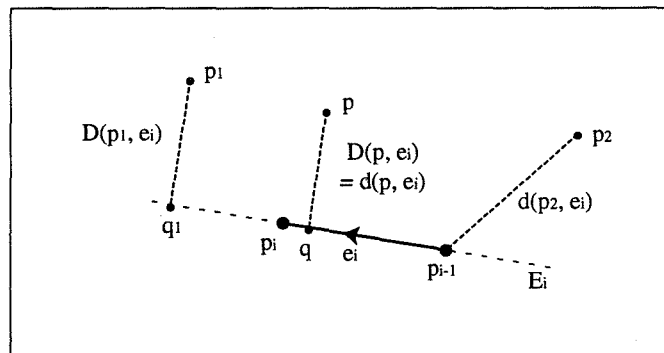
• **Définition 4 :** Soit  $e_i$ , un segment de droite,  $p$  un point du plan et  $q$  la projection orthogonale de  $p$  sur  $E_i$ , droite support de  $e_i$  (cf. fig. IV.14).

La distance de  $p$  à  $e_i$ , notée  $D(p, e_i)$ , est définie par :

$$D(p, e_i) = \text{distance euclidienne } (p, q).$$

Dans la suite de ce chapitre le terme "distance" fera référence à cette définition par opposition au terme "distance euclidienne", qui désigne la distance euclidienne classique entre  $p$  et  $e_i$ , notée  $d(p, e_i)$ , et qui est définie comme suit :

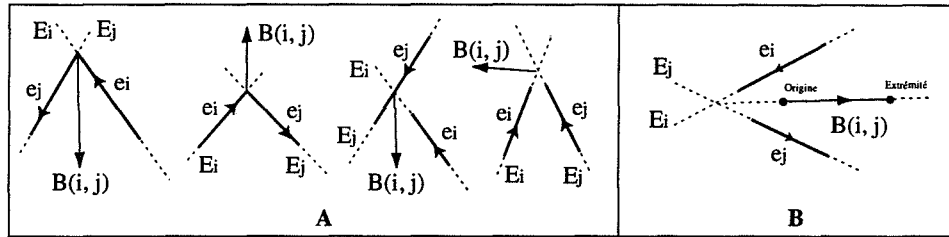
$$d(p, e_i) = \begin{cases} \text{la distance entre } p \text{ et } q, \text{ si } q \text{ est situé sur le segment } e_i, \\ \text{le minimum des distances entre } p \text{ et les points extrémité de } e_i, \text{ si } q \text{ est à l'extérieur de } e_i. \end{cases}$$



**Figure IV.14 :** Définition des notions de distance  $D(p, e_i)$  et de "distance Euclidienne"  $d(p_2, e_i)$ .

• **Définition 5 :** Soit  $e_i$  et  $e_j$  deux arêtes d'un contour polygonal  $C_n$ . Si  $e_i$  et  $e_j$  ne sont pas parallèles, les droites  $E_i$  et  $E_j$  partagent le plan en 4 sous-espaces. Nous appelons *bissectrice* de  $e_i$  et  $e_j$ , notée  $B(i, j)$ , la demi-droite située dans le sous-espace situé à gauche de  $e_i$  et de  $e_j$ , et dont tous les points sont équidistants de  $e_i$  et de  $e_j$  (cf. fig. IV.15A). Si  $e_i$  et  $e_j$  sont parallèles et de sens opposé,  $B(i, j)$  est définie comme la droite à égale distance de  $E_i$  et de  $E_j$ , et située à gauche de  $e_i$  et de  $e_j$ .  $B(i, j)$  n'est pas définie si :

- $e_i$  et  $e_j$  sont parallèles et de même sens,
- $e_i$  et  $e_j$  sont parallèles, de sens opposé et si  $e_j$  est à droite de  $e_i$ ,
- $E_i$  et  $E_j$  sont confondues et si les arêtes  $e_i$  et  $e_j$  sont de sens opposé.



**Figure IV.15 :** Orientations des demi-droites (A) et des segments (B), bissectrices des arêtes  $e_i$  et  $e_j$ .

$B(i, j)$  est dite "orientée" si un sens est imposé sur la bissectrice. Si  $e_i$  et  $e_j$  sont deux arêtes consécutives sur  $C_n$ , le sens d'orientation est conforme à l'accroissement de la distance entre les points de la bissectrice  $B(i, j)$  et ses deux arêtes relatives  $e_i$  et  $e_j$ . Si  $e_i$  et  $e_j$  ne sont pas consécutives sur  $C_n$ , la bissectrice  $B(i, j)$  est de même sens que l'arête  $e_j$  (ce qui veut dire que leur produit scalaire est positif). Par commodité, le terme bissectrice sera employé aussi bien pour désigner la demi-droite  $B(i, j)$ , que pour parler d'une portion de la bissectrice  $B(i, j)$  limitée par les points "origine" et "extrémité" (cf. fig. IV.15B).

#### IV.2.1.3 - Examen de situations locales

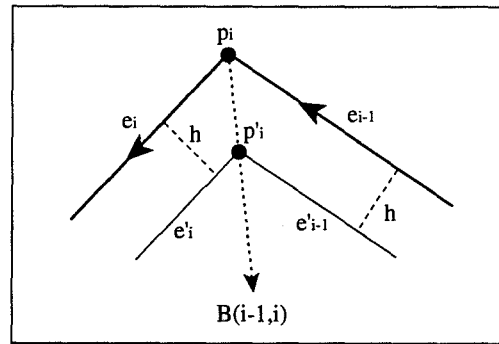
Dans cette partie nous allons nous intéresser aux différents événements pouvant se produire durant la croissance en fonction des deux règles énoncées au paragraphe IV.2.1.1. Les différents événements seront étudiés séquentiellement, et nous montrerons qu'ils induisent soit des "points de suture" qui matérialisent les branches du graphe du réseau bissecteur, soit des "points de rupture" qui sont les sommets de ce graphe.

Nous montrerons enfin qu'il n'existe que trois types de points de rupture que nous nommerons B, C, D.

Nous allons maintenant supposer qu'il existe une forme parallèle à la distance  $h$  de  $F$ , et nous allons étudier les cas de figure possibles entre les différentes arêtes du front de croissance  $G(F, h)$ .

##### IV.2.1.3.1 - Cas A : point de suture

Considérons deux arêtes consécutives  $e_{i-1}$ ,  $e_i$  de  $F$  (cf. fig. IV.16). Soient  $e'_{i-1}$  et  $e'_i$  les deux arêtes consécutives du contour parallèle à la distance  $h$  de  $F$ , qui sont respectivement parallèles à  $e_{i-1}$  et à  $e_i$ .



**Figure IV.16 :** Cas "A" des situations locales.

Le point d'intersection  $p'_i$  est un "point de suture" défini comme suit :

• **Définition 6 :** Un point de suture  $p'_i$  est défini comme l'intersection entre deux arêtes  $e'_{i-1}$  et  $e'_i$  consécutives sur  $G(F, h)$ .

Comme par définition les distances  $D(p'_i, e_{i-1})$  et  $D(p'_i, e_i)$  sont égales, le point de suture  $p'_i$  est forcément situé sur la bissectrice  $B(i-1, i)$ . Ce qui permet de formuler le lemme suivant :

**Lemme 1 :** *Les points de suture entre les différentes arêtes consécutives d'un contour parallèle  $G(F, h)$  à la distance  $h$  de  $F$  sont tous situés sur les bissectrices entre ces arêtes.*

#### IV.2.1.3.2 - Cas B : point de rupture de type B

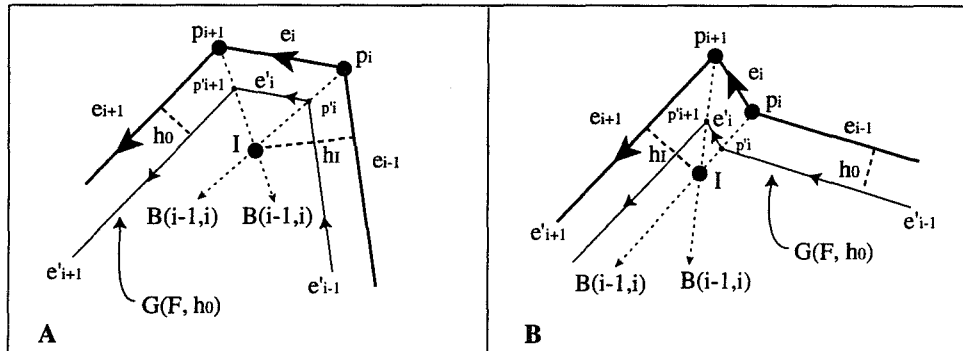
Considérons trois arêtes consécutives  $e_{i-1}$ ,  $e_i$  et  $e_{i+1}$  de  $F$ , telles que  $E_{i-1}$  et  $E_{i+1}$  ne soient pas parallèles et que l'une des conditions suivantes soit remplie :

- 1 - Les sommets  $p_i$  et  $p_{i+1}$  étant convexes, alors le point d'intersection entre  $E_{i-1}$  et  $E_{i+1}$  est situé à droite de  $e_i$ . Dans le cas contraire la situation est examinée dans le cas D.
- 2 - Si, un seul sommet ( $p_{i+1}$  par exemple) est convexe et l'autre sommet ( $p_i$  dans ce cas) est concave, le point d'intersection entre  $E_{i-1}$  et  $E_{i+1}$  doit être situé à gauche de  $e_i$ . Si ce n'est pas le cas, ou si  $E_{i-1}$  et  $E_{i+1}$  sont parallèles, les bissectrices  $B(i-1, i)$  et  $B(i, i+1)$  ne s'intersectent pas et la situation n'est pas remarquable.

Soit  $I$  le point d'intersection entre  $B(i-1, i)$  et  $B(i, i+1)$  situé à la distance  $h_I$  des arêtes  $e_{i-1}$ ,  $e_i$  et  $e_{i+1}$ .

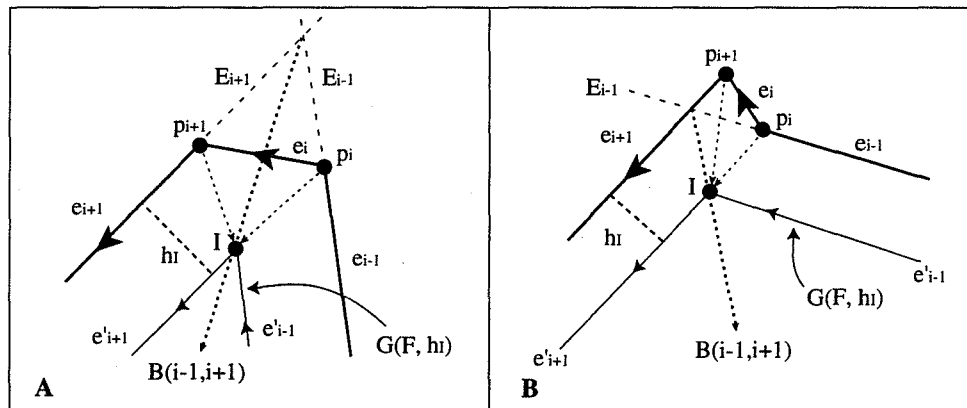
• pour toute distance  $h_0$  inférieure à  $h_I$ , les arêtes  $e'_{i-1}$ ,  $e'_i$  et  $e'_{i+1}$  existent et sont uniques (cf. fig. IV.17).

Une portion du contour parallèle  $G(F, h_0)$ , s'il existe, est constituée par  $e'_{i-1}$ ,  $e'_i$  et  $e'_{i+1}$ . L'arête  $e'_i$  est limitée à gauche par la bissectrice  $B(i-1, i)$  et à droite par la bissectrice  $B(i, i+1)$ .



**Figure IV.17 :** Construction des arêtes parallèles  $e'_{i-1}$ ,  $e'_i$  et  $e'_{i+1}$  pour une distance inférieure à  $h_I$  de  $F$ .

• pour la distance  $h$  égale à  $h_I$ , les deux points  $p'_i$  et  $p'_{i+1}$  sont confondus avec  $I$ , et les deux arêtes  $e'_{i-1}$  et  $e'_{i+1}$  s'intersectent au point  $I$ . L'élément  $e'_i$ , qui est réduit au point  $I$ , ne fait pas partie du contour parallèle à la distance  $h$  de  $F$  (cf. fig. IV.18). Le contour parallèle  $G(F, h_I)$  composé de  $e'_{i-1}$  et  $e'_{i+1}$  possède donc une arête de moins que  $F$ . Le point  $I$  est situé sur la bissectrice  $B(i-1, i+1)$ , et connecte les trois bissectrices  $B(i-1, i)$ ,  $B(i, i+1)$  et  $B(i-1, i+1)$ .



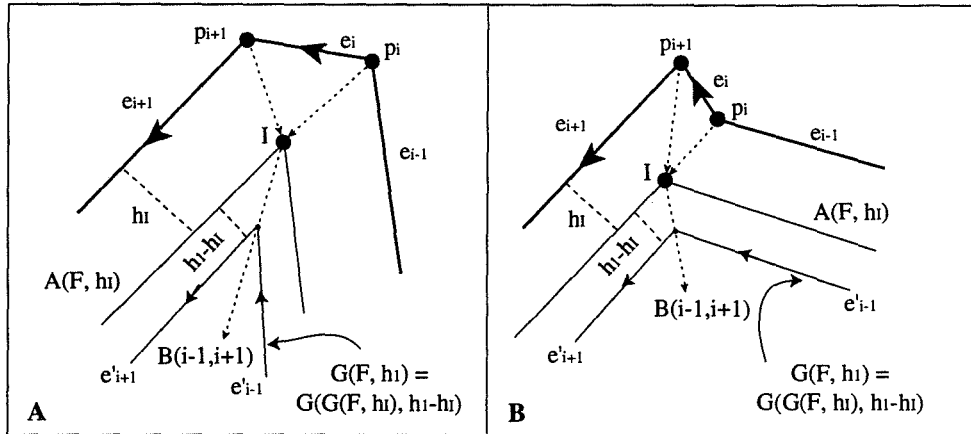
**Figure IV.18 :** Construction des arêtes parallèles  $e'_{i-1}$ ,  $e'_i$  et  $e'_{i+1}$  pour une distance de  $F$  égale à  $h_I$ .

Le point  $I$  est appelé "point de rupture".

• **Définition 7 :** Un point de rupture  $I$  est le premier point d'intersection entre deux arêtes parallèles  $e'_{i-1}$  et  $e'_{i+1}$  relatives à deux arêtes  $e_{i-1}$  et  $e_{i+1}$  non consécutives sur  $F$ .

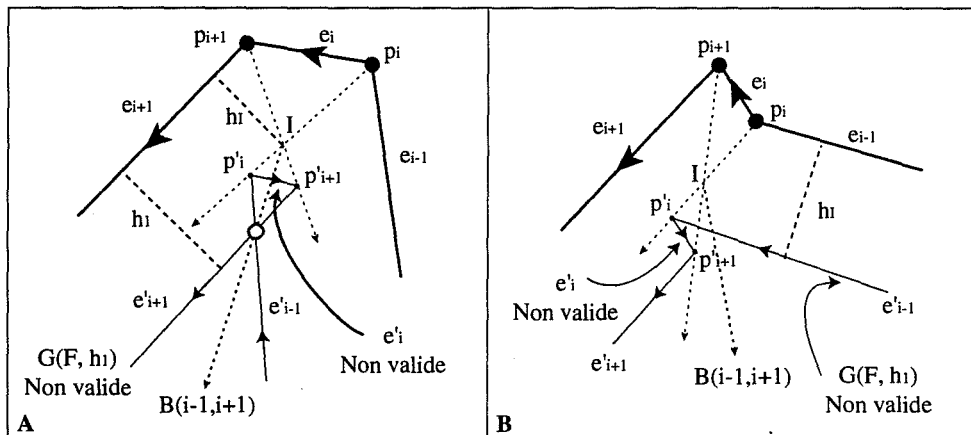
Le point de rupture  $I$  est confondu avec le point de suture des arêtes  $e'_{i-1}$  et  $e'_{i+1}$  du front de croissance  $G(F, h_I)$ .

• pour une distance  $h_1$  supérieure à  $h_I$ , le contour parallèle  $G(F, h_1)$  ne peut être trouvé, s'il existe, que par croissance d'une distance  $h_1 - h_I$  à partir de  $G(F, h_I)$  (cf. fig. IV.19).



**Figure IV.19 :** Construction des arêtes parallèles  $e'_{i-1}$  et  $e'_{i+1}$  à une distance de  $F$  égale à  $h_1 - h_I$ .

Un contour parallèle construit directement à partir de  $F$ , et à une distance  $h_1$  de  $F$ , ne peut pas être valide (cf. fig. IV.20). En effet, l'arête  $e'_i$  n'est pas strictement parallèle à  $e_i$ , et dans certains cas, le contour parallèle peut s'auto-intersecter (cf. fig. IV.20A).



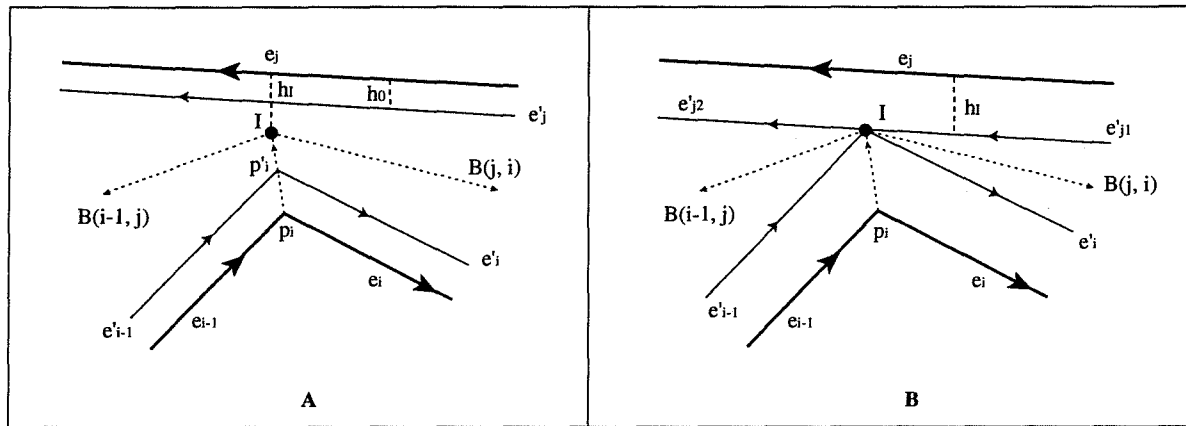
**Figure IV.20 :** Construction des arêtes de  $G(F, h_1)$  directement à partir de  $F$ .  
Le contour parallèle n'est pas valide puisque l'arête  $e'_i$  n'est pas strictement parallèle à  $e_i$ , de plus, dans le premier cas, le contour s'auto-intersecte.

**Lemme 2 :** S'il existe un front de croissance cristalline à la distance  $h$  de  $F$ , et si  $B(i-1, i)$  et  $B(i, i+1)$  s'intersectent en un point de rupture  $I$  situé à une distance  $h_I$  de  $e_i$  inférieure à  $h$ , alors  $e'_i$  n'existe pas sur  $G(F, h)$ , et les arêtes parallèles  $e'_{i-1}$  et  $e'_{i+1}$  partagent un point de suture situé sur la bissectrice  $B(i-1, i+1)$  limitée par  $I$ . Une portion du contour parallèle  $G(F, h)$  est constituée par ...,  $e'_{i-1}$ ,  $e'_{i+1}$ , .... De ce fait, pour être valide, le contour parallèle  $G(F, h)$  ne peut être construit qu'à partir de  $G(F, h_I)$ , et à une distance  $h - h_I$  des arêtes de  $G(F, h_I)$ .

### IV.2.1.3.3 - Cas C : point de rupture de type C

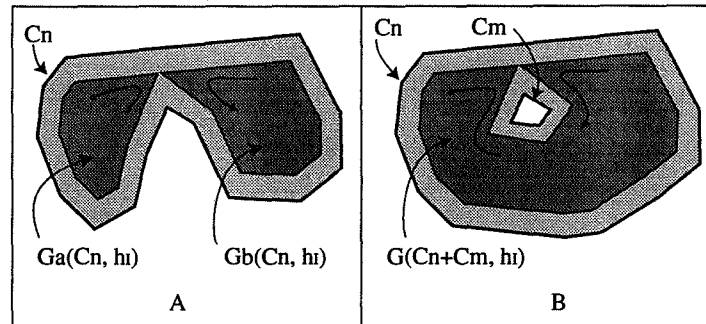
Considérons trois arêtes  $e_{i-1}$ ,  $e_i$  et  $e_j$  de  $F$  telles que le sommet  $p_i$  soit concave, et que l'arête  $e_j$  ne soit consécutive ni à  $e_{i-1}$ , ni à  $e_i$ . Soit  $I$  le point d'intersection entre  $B(i-1, j)$  et  $B(i, j)$ , situé à la distance  $h_I$  de  $e_{i-1}$ ,  $e_i$  et  $e_j$ .

- pour toute distance  $h_0$  inférieure à  $h_I$ ,  $G(F, h_0)$  est constitué, s'il existe, par les arêtes parallèles  $e'_{i-1}$ ,  $e'_i$  et  $e'_j$ , et ces éléments sont uniques (cf. fig. IV.21A).



**Figure IV.21 :** Construction des arêtes de  $G(F, h)$  à une distance  $h$  inférieure à  $h_I$  de  $F$  (figure A), et à une distance  $h$  égale à  $h_I$  de  $F$  (figure B).

- si, à la distance  $h$  égale à  $h_I$ , les arêtes  $e'_{i-1}$  et  $e'_i$  intersectent l'arête  $e'_j$  au point  $I$ , alors  $I$  divise l'arête  $e'_j$  en  $e'_{j1}$  et  $e'_{j2}$ . Les arêtes  $e'_{j1}$  et  $e'_i$ , et les arêtes  $e'_{i-1}$  et  $e'_{j2}$  partagent respectivement un point situé sur les bissectrices  $B(j, i)$  et  $B(i-1, j)$ . De plus ces deux bissectrices divergent à partir de  $I$ .  $I$  est donc un point à une distance locale minimale de  $F$  (cf. fig. IV.21B).



**Figure IV.22 :** Devenir du contour parallèle  $G(F, h_I)$  en fonction de la connexité des contours.

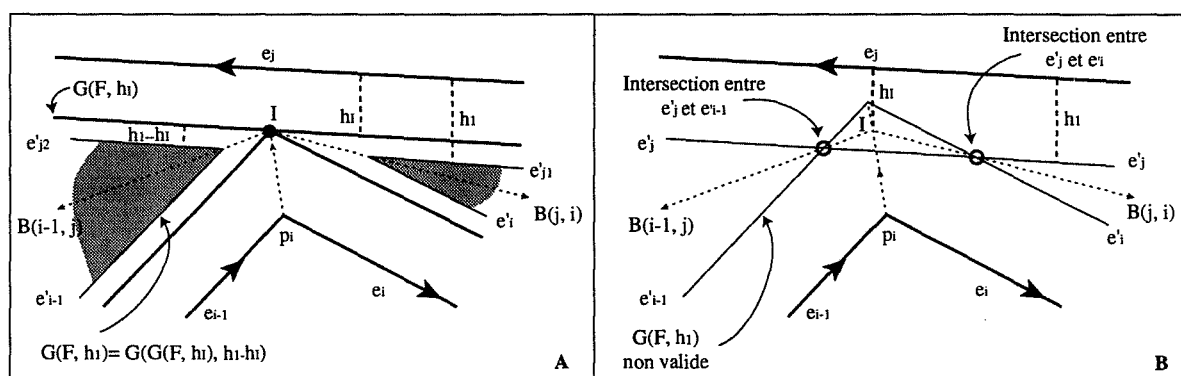


- si  $e_{i-1}$ ,  $e_i$  et  $e_j$  appartiennent au même contour  $C_n$ ,  $G(C_n, h_I)$  est alors auto-intersectant (cf. fig. IV.22A). On décompose alors le contour parallèle en  $G_a(C_n, h_I)$  et en  $G_b(C_n, h_I)$  :
  - $G_a(C_n, h_I)$  est composé des bords internes ( $e'_{i-1}$ ,  $e'_{j2}$ , ...,  $e'_{i-1}$ ) et comporte  $n_a$  arêtes.
  - $G_b(C_n, h_I)$  est composé des bords internes ( $e'_{j1}$ ,  $e'_i$ , ...,  $e'_{j1}$ ) et comporte  $n_b$  arêtes.
  - $G_a(C_n, h_I) \cup G_b(C_n, h_I)$  comporte alors  $(n_a + n_b)$  arêtes, et possède une composante connexe de plus que  $F$ .
- si les arêtes  $e_{i-1}$ ,  $e_i$  et l'arête  $e_j$  appartiennent à deux contours différents  $C_n$  et  $C_m$  (cas d'un polygone avec trous comme illustré par la figure IV.22B), les deux contours parallèles  $G(C_n, h_I)$  et  $G(C_m, h_I)$  ont alors un point d'intersection, et on les fusionne dans un même contour  $G(C_n + C_m, h_I)$ . Le contour parallèle  $G(C_n + C_m, h_I)$  comporte alors une composante connexe de moins que  $F$ .

Dans les deux cas, le front de croissance  $G(F, h_I)$  comporte une arête de plus et un sommet concave de moins que  $F$ .

- pour toute distance  $h_1$  supérieure à  $h_I$ , la croissance ne peut s'effectuer qu'à partir des arêtes de  $G(F, h_I)$ , et à une distance  $h_1 - h_I$  de  $G(F, h_I)$  (cf. fig. IV.23A). Les arêtes  $e'_{i-1}$ ,  $e'_{j2}$  (resp.  $e'_{j1}$ ,  $e'_i$ ) partagent alors un point de suture situé sur la bissectrice  $B(i-1, j2)$  (resp.  $B(j1, i)$ ).

Un contour construit directement à partir de  $F$  et à la distance  $h_1$  des arêtes de  $F$  ne peut pas être valide car sinon les arêtes  $e'_i$ ,  $e'_j$  et  $e'_{j+1}$  s'intersecteraient, ce qui est impossible (cf. fig. IV.23B).



**Figure IV.23 :** Construction des arêtes de  $G(F, h_1)$  à une distance  $h$  supérieure à  $h_I$  de  $F$ . Dans le cas où  $G(F, h_1)$  est directement construit à partir de  $F$  (figure B), le résultat n'est pas valide.

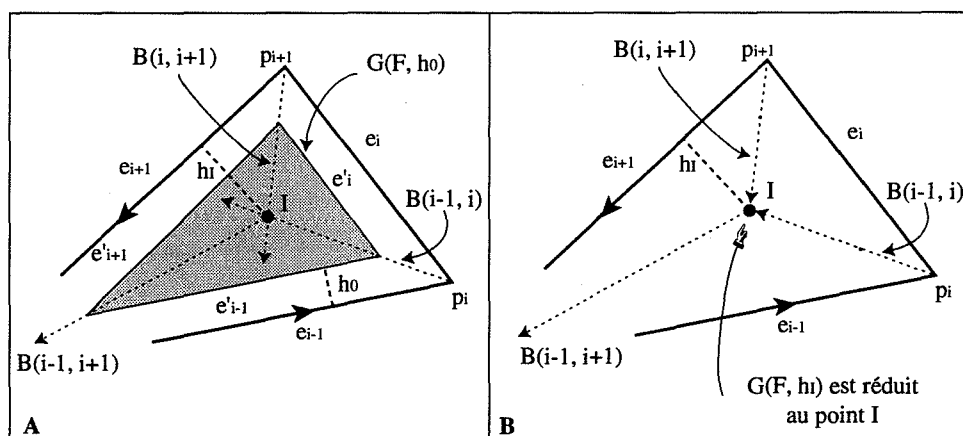
Dans le cas où plusieurs sommets concaves se font face, le résultat est obtenu par traitement successif de chacun des sommets concaves avec l'arête opposée.

En conclusion du cas C, nous formulons le lemme suivant :

**Lemme 3 :** *S'il existe un front de croissance cristalline à la distance  $h$  de  $F$ , et si deux arêtes consécutives  $e'_{i-1}$  et  $e'_i$  intersectent une arête non adjacente  $e'_j$  au point  $I$ , situé sur un contour parallèle à une distance  $h_I$  inférieure à  $h$ , alors l'arête  $e'_j$  est divisée en deux nouvelles arêtes  $e'_{j1}$  et  $e'_{j2}$ . Si les trois arêtes sont relatives au même contour  $C_n$ , le contour parallèle à  $C_n$  possède deux composantes  $G_1(C_n, h)$  et  $G_2(C_n, h)$  qui comportent respectivement les arêtes  $e'_{j1}$ ,  $e'_i$  et  $e'_{i-1}$ ,  $e'_{j2}$ . Dans le cas contraire, les contours parallèles relatifs aux deux contours  $C_n$  et  $C_m$  sont fusionnés en une seule composante connexe  $G(C_n + C_m, h)$ . Les points de suture entre  $e'_{j1}$ ,  $e'_i$  et  $e'_{i-1}$ ,  $e'_{j2}$  sont respectivement situés sur les bissectrices  $B(j1, i)$  et  $B(i-1, j2)$ . Pour être valide, un nouveau contour parallèle  $G(F, h_I)$  à une distance  $h_I$  de  $F$ ,  $h_I$  supérieure à  $h_I$ , doit être construit à partir de  $G(F, h_I)$ , et à une distance  $h_I - h_I$  des arêtes de  $G(F, h_I)$ .*

#### IV.2.1.3.4 - Cas D : point de rupture de type D

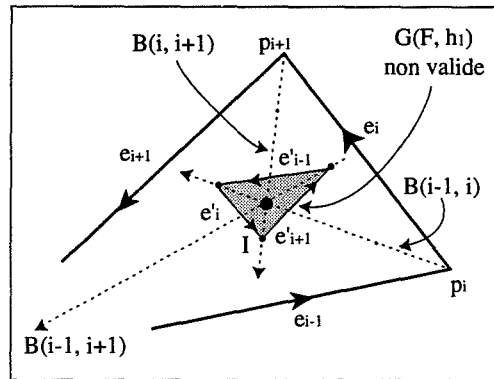
Considérons trois arêtes consécutives  $e_{i-1}$ ,  $e_i$  et  $e_{i+1}$  d'un contour  $C_n$ , telles que les sommets  $p_i$  et  $p_{i+1}$  soient convexes, et que les arêtes  $e_{i-1}$ ,  $e_{i+1}$  soient parallèles ou que leur point d'intersection soit situé à gauche de  $e_i$ . Soit  $I$  le point d'intersection entre  $B(i-1, i)$  et  $B(i, i+1)$  situé à la distance  $h_I$  de  $e_{i-1}$ ,  $e_i$  et  $e_{i+1}$ .



**Figure IV.24 :** Construction des arêtes de  $G(F, h)$  à une distance  $h$  inférieure à  $h_I$  de  $F$  (figure A), et à une distance  $h$  égale à  $h_I$  de  $F$  (figure B).

- pour une distance  $h_0$  inférieure à  $h_I$ ,  $G(C_n, h_0)$  est constitué, s'il existe, par les arêtes  $e'_{i-1}$ ,  $e'_i$  et  $e'_{i+1}$  (cf. fig. IV.24A).

• pour  $h$  égale à  $h_I$ , l'arête  $e_i$  est réduite à un point. Si  $e_{i+1}$  et  $e_{i-1}$  ne sont pas parallèles, les deux arêtes  $e'_{i-1}$  et  $e'_{i+1}$  sont aussi réduites au point  $I$  (cf. fig. IV.24B). Il ne reste alors plus d'espace disponible pour la croissance, le processus s'arrête et il ne peut plus exister de contour parallèle au-delà de  $h_I$ . En effet, si un tel contour existe le lemme 2 est contredit comme l'illustre la figure IV.25.



**Figure IV.25 :** Un contour construit à une distance  $h$  de  $F$  supérieure à  $h_I$  ne peut pas être valide.

Si en revanche,  $e_{i+1}$  et  $e_{i-1}$  sont parallèles, alors les deux arêtes  $e'_{i-1}$  et  $e'_{i+1}$  sont confondues le long de  $B(i-1, i+1)$ . Dans ce cas, le fait que la croissance puisse continuer ou non dépend de l'agencement des autres arêtes de  $G(C_n, h_I)$ .

Notons que la distance entre les points sur les différentes bissectrices et les arêtes relatives à ces bissectrices croît vers le point  $I$  ou reste constante dans le cas d'arêtes parallèles.  $I$  est donc un point à une distance maximale locale de  $F$ .

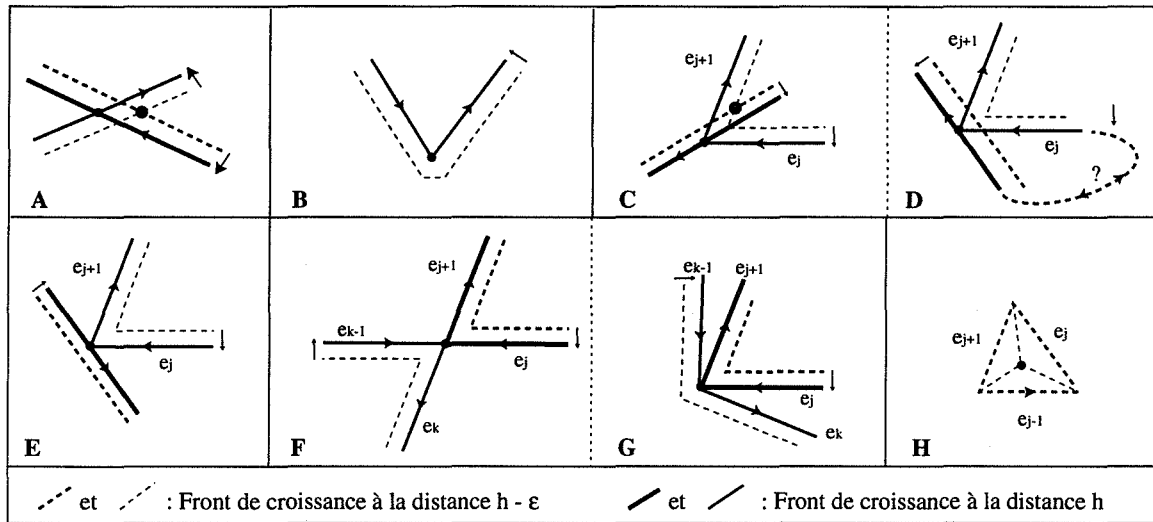
**Lemme 4 :** Si le point  $I$  est le point d'intersection entre trois bissectrices  $B(i-1, i)$ ,  $B(i, i+1)$  et  $B(i+1, i-1)$ , tel que  $E_{i-1}$  et  $E_{i+1}$  convergent à gauche de  $e_i$ , alors le contour parallèle  $G(C_n, h_I)$  est réduit au point  $I$  et il n'existe pas de contour parallèle à une distance supérieure à  $h_I$  qui comporte des arêtes parallèles à  $e_{i-1}$ ,  $e_i$  et  $e_{i+1}$ . Si les arêtes  $e_{i-1}$  et  $e_{i+1}$  ne sont pas parallèles, alors il n'est pas possible de trouver un contour parallèle valide issu de  $C_n$  à une distance de  $C_n$  supérieure à  $h_I$ .

Les trois situations où apparaissent les points de rupture des cas B, C et D correspondent respectivement aux trois configurations suivantes :

- il existe une seule bissectrice issue du point  $I$  dans le nouveau front d'onde.
- il existe deux bissectrices issues du point  $I$  dans le nouveau front d'onde.
- il n'existe aucune bissectrice issue du point  $I$ .

Nous allons maintenant montrer que ces situations locales sont les seules qui puissent induire un point de rupture.

**Lemme 5 :** *Un point de rupture, défini comme la première intersection entre au moins deux arêtes parallèles relatives à deux arêtes non consécutives sur  $F$ , ne peut être que de type B, C ou D.*



**Figure IV.26 :** Illustration de la preuve du Lemme 5.

*Preuve :* Soit  $R$ , un point de rupture rencontré sur un front de croissance à la distance  $h$  de  $F$ .  $R$  est donc l'intersection de deux arêtes parallèles  $e'_i$  et  $e'_j$ .  $R$  est alors forcément confondu avec au moins une des extrémités de  $e'_i$  ou de  $e'_j$ , car sinon il existerait une intersection entre les arêtes  $e''_i$  et  $e''_j$  du front de croissance à la distance  $h - \epsilon$  de  $F$ , ce qui, par définition, est impossible (cf. fig IV.26A).

Si  $e'_i$  et  $e'_j$  sont deux arêtes consécutives alors  $R$  est confondu avec leur point de suture et  $R$  est un point de rupture de type B (cf. fig IV.26B). Si, au contraire,  $e'_i$  et  $e'_j$  ne sont pas consécutives, alors, dans un cas général,  $R$  est confondu avec une seule des extrémités des deux arêtes, par exemple  $p'_{j+1}$ . Pour la même raison que précédemment la situation de la figure IV.26C ne peut se produire, et dans le cas de la figure IV.26D les orientations des arêtes sont incohérentes. En effet, les deux arêtes (moins le point de suture  $p_{j+1}$ ) ne peuvent être qu'à gauche de  $e_i$ , le point  $p_{j+1}$  est alors un sommet concave et  $R$  est alors un point de rupture de type C (cf. fig IV.26E).

Le cas où  $R$  est un point d'intersection de plusieurs couples d'arêtes n'est qu'un cas particulier des points de rupture de type C (cf. fig. IV.26F et IV.26G).

Si  $R$  est le point d'intersection de plus de deux arêtes au niveau de leur point de suture, alors ces arêtes étaient deux à deux adjacentes à la même arête sur le front de croissance  $G(F, h - \epsilon)$ ,  $R$  est alors un point de rupture de type D (cf. fig. IV.26H).  $\therefore$

Si plusieurs points de rupture sont rencontrés pour une même distance  $h$ , ils seront simplement traités successivement. Les cas particuliers, pouvant se produire quand un point de rupture est commun à plus de trois arêtes ou quand deux arêtes sont parallèles, seront traités de la même façon en ne considérant que trois arêtes à la fois.

#### IV.2.1.4 - Détermination de l'ensemble des contours parallèles

Nous allons maintenant nous intéresser à la croissance complète d'une forme  $F$  et à la construction de ses contours parallèles.

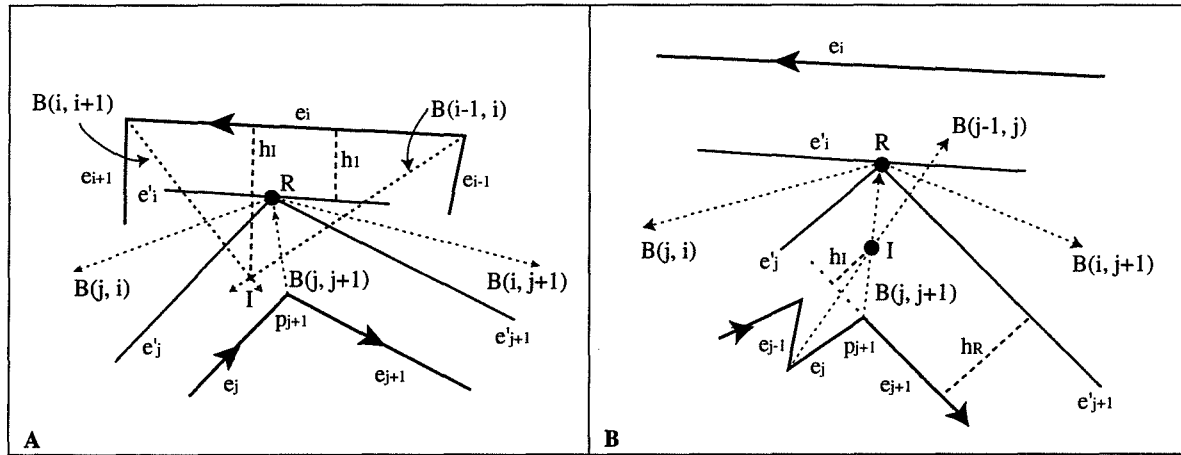
Soit  $e_i$ , une arête d'un contour  $C_n$  de  $F$ . Pour la distance  $h = 0$  de  $C_n$ , le front de croissance  $G(C_n, 0)$  est égal à  $C_n$ . L'arête  $e_i$  est limitée par deux points de suture confondus avec  $p_i$  et  $p_{i+1}$  respectivement situés sur les bissectrices  $B(i-1, i)$  et  $B(i, i+1)$ .

Nous faisons croître le contour d'une distance  $h_1$ , avec  $h_1 = h + \varepsilon$ , et nous choisissons  $\varepsilon$  tel qu'il n'existe aucun point de rupture concernant les arêtes  $e_{i-1}$ ,  $e_i$  et  $e_{i+1}$  à une distance inférieure à  $h_1$ . L'arête  $e_i$  de  $G(C_n, h_1)$  est maintenant limitée par les points de suture  $p'_i$  et  $p'_{i+1}$  toujours respectivement situés sur les bissectrices  $B(i-1, i)$  et  $B(i, i+1)$ .

Examinons les conditions pour qu'il existe à la distance  $h_1$  un point de rupture concernant l'arête  $e_i$  :

- Si le point  $I$ , point d'intersection entre  $B(i-1, i)$  et  $B(i, i+1)$ , est situé à la distance  $h_I$  égale à  $h_1$ , alors nous sommes ramenés aux cas B et D des situations locales et l'arête  $e_i$  est réduite au point  $I$ .

- S'il existe un point de rupture  $R$  qui est de type C, alors  $R$  est le point d'intersection entre  $e_i$  et deux arêtes  $e'_j$  et  $e'_{j+1}$  non consécutives à  $e_i$ . Le point  $R$  est situé à la distance  $h_1$  des trois arêtes  $e_i$ ,  $e_j$  et  $e_{j+1}$ , avec  $h_1$  inférieure à  $h_I$ .  $R$  est donc le point d'intersection des bissectrices  $B(i, j+1)$ ,  $B(i, j)$  et  $B(j, j+1)$ .



**Figure IV.27 :** Conditions d'existence d'un point de rupture de type C.

Comme  $R$  est situé sur  $e_i'$ , il est forcément à droite de la bissectrice orientée  $B(i-1, i)$  et à gauche de la bissectrice orientée  $B(i, i+1)$ , ou éventuellement situé sur la droite support de l'une de ces bissectrices (cf. fig. IV.27A).

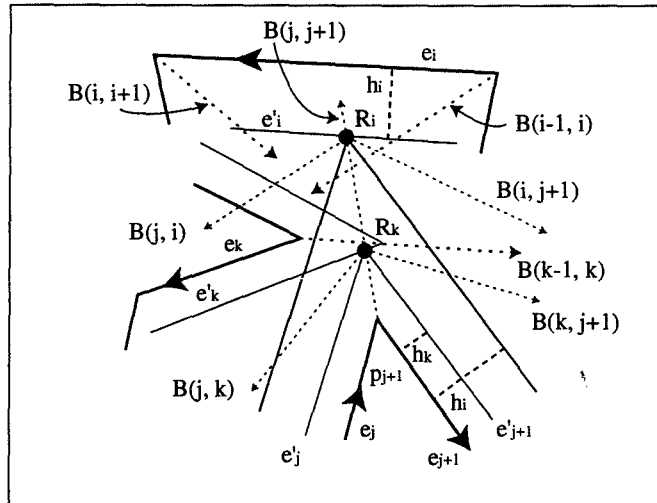
De plus  $D(p_j, e_i) > D(p_{j+1}, e_i)$  et  $D(p_{j+2}, e_i) > D(p_{j+1}, e_i)$ . Dans le cas contraire, si  $D(p_j, e_i)$  est par exemple inférieure à  $D(p_{j+1}, e_i)$  alors  $e_i$  et  $e_j$  convergent, et  $B(j-1, j)$  induit un point de rupture avant  $R$  (cf. fig. IV.27B). Dans ce cas de figure  $R$  n'est donc pas valide.

Ce qui prouve le lemme suivant :

**Lemme 6 :** Soit  $e_i', e_j', e_{j+1}'$ , trois arêtes parallèles du front de croissance  $G(C_n, h)$ . Pour qu'à une distance  $h_1$ ,  $h_1 \geq h$ , le point  $R$  soit un point de rupture possible de type C entre les arêtes parallèles relatives à l'arête  $e_i$  et aux deux arêtes  $e_j$  et  $e_{j+1}$  séparées par le sommet concave  $p_{j+1}$ , il est nécessaire que  $R$ , point d'intersection entre les trois bissectrices  $B(i, j+1)$ ,  $B(i, j)$  et  $B(j, j+1)$ , soit situé respectivement à droite de  $B(i-1, i)$  et à gauche de  $B(i, i+1)$ . Il faut également que  $D(p_j, e_i)$  et  $D(p_{j+2}, e_i)$  soient supérieures à  $D(p_{j+1}, e_i)$ .

De plus,

**Lemme 7:** Si deux arêtes  $e_j$  et  $e_{j+1}$  séparées par le sommet concave  $p_{j+1}$  peuvent induire plusieurs points de rupture, seul celui dont la distance avec  $p_{j+1}$  est la plus faible doit être considéré.



**Figure IV.28 :** Un sommet concave ne peut induire qu'un seul point de rupture de type C.

*Preuve :* Supposons que les arêtes  $e_j$  et  $e_{j+1}$  puissent induire plusieurs points de rupture (cf. fig. 28). Considérons qu'il puisse exister un point de rupture  $R_i$  avec l'arête  $e_i$  et un point de rupture  $R_k$  avec l'arête  $e_k$ . Soient  $d_i$  et  $d_k$  les distances euclidiennes respectives entre le point  $p_{j+1}$  et les points  $R_i$  et  $R_k$ , et supposons, sans perte de généralité, que  $d_i$  est supérieure à  $d_k$ . Alors, il est clair que la distance  $h_k$  entre  $R_k$  et  $e_j$  est inférieure à la distance  $h_i$  entre  $R_i$  et  $e_j$ , et donc que l'intersection entre les arêtes parallèles  $e'_j$ ,  $e'_{j+1}$  et l'arête  $e'_k$  se produira au cours de la croissance avant l'intersection entre les arêtes  $e'_j$ ,  $e'_{j+1}$  et l'arête  $e'_i$ . Les arêtes  $e'_j$  et  $e'_{j+1}$  n'étant plus consécutives sur le contour parallèle au-delà de la distance  $h_k$ , les autres points de rupture induits par  $e_j$  et  $e_{j+1}$  ne sont pas valides.  $\therefore$

Soit une forme polygonale  $F$ , composée de  $n_x$  sommets convexes et de  $n_c$  sommets concaves. Nous pouvons attribuer à chaque arête  $e_i$  de  $F$  la distance entre le point d'intersection  $I$  des deux bissectrices  $B(i-1, i)$  et  $B(i, i+1)$ , s'il existe, et l'arête  $e_i$ . Si ce point d'intersection, qui est potentiellement un point de rupture de type B ou D, n'existe pas, la distance  $D(I, e_i)$  est considérée comme infinie. Pour chaque couple d'arêtes  $e_j$ ,  $e_{j+1}$ , séparé par un sommet concave  $p_{j+1}$ , nous pouvons rechercher parmi tous les points de rupture potentiellement induits par ces deux arêtes, le point de rupture  $R$  de type C, s'il existe, dont la distance euclidienne  $d(R, p_{j+1})$  est la plus petite, et qui est situé à la distance  $D(R, e_j)$  de  $e_j$ . Ce point  $R$  ne peut être un point de rupture de type C potentiellement valide que s'il est à une distance de  $e_j$  inférieure à celles des points d'intersection entre  $B(j-1, j)$  et  $B(j, j+1)$  d'une part, et entre  $B(j, j+1)$  et  $B(j+1, j+2)$  d'autre part. Sinon, d'après les lemmes 2 et 6, le contour  $G(F, D(R, e_j))$  ne serait pas valide.

**Lemme 8 :** Si l'ensemble  $S$  des points de rupture potentiels choisis précédemment n'est pas vide, le premier point de rupture rencontré au cours de la croissance est le point de rupture  $R$  dont la distance  $D(R, e_i)$  avec l'arête  $e_i$  impliquée est la plus petite.  $D(R, e_i)$  est notée  $h_{\min}$ .

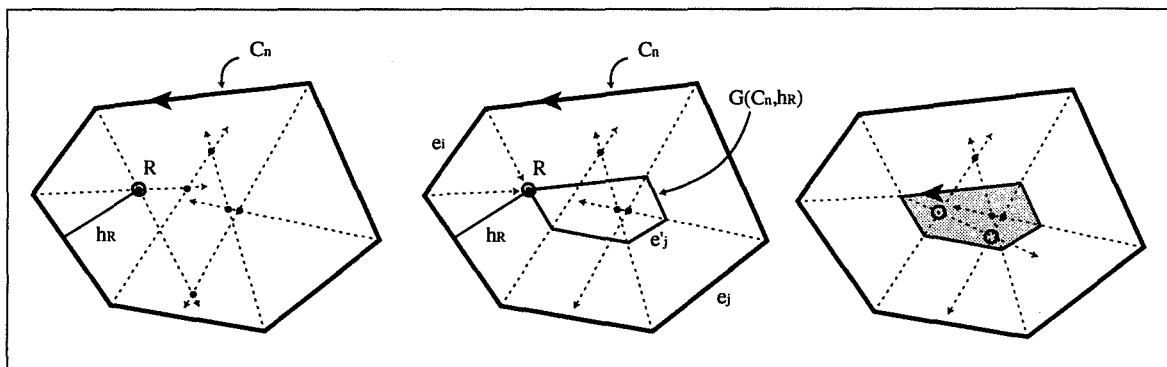
*Preuve :* Pour simplifier la démonstration, nous considérons que deux points de rupture appartenant à l'ensemble  $S$  ne peuvent pas être à la même distance de leur arête respective. Supposons que le premier point de rupture  $P$  rencontré au cours de la croissance ne soit pas celui de  $h_{\min}$ . Le point  $P$  appartient forcément à l'ensemble  $S$ , puisqu'un point de rupture ne peut être que de type B, C ou D, et que tous les points de rupture possibles entre les différentes arêtes ont été calculés pour obtenir  $S$ . La distance  $D(P, e_p)$  entre  $P$  et l'arête  $e_p$  impliquée par ce point de rupture est donc supérieure à  $h_{\min}$ . Ceci n'est pas possible puisque dans ce cas le point de rupture de distance  $h_{\min}$  n'est pas pris en compte, ce qui d'après les lemmes 2, 3 et 4 implique que le front de croissance  $G(F, D(P, e_p))$  n'est pas valide.  $\therefore$

Inversement, nous démontrons le lemme suivant.

**Lemme 9 :** Un contour parallèle construit à une distance  $h$  de  $F$ , où  $h$  est inférieure à la distance  $h_R$  ( $h_R = h_{\min}$ ) du premier point de rupture  $R$  rencontré, est un contour parallèle valide qui comporte autant d'éléments que la forme  $F$ .

*Preuve :* Comme  $h$  est inférieure à  $h_{\min}$ , D'après les lemmes 2, 3 et 4, toutes les arêtes de la forme  $F$  induisent une arête valide à la distance  $h$  de  $F$ . Elles forment le contour parallèle à la distance  $h$  de  $F$ , qui est valide et qui comporte autant d'éléments que  $F$ .  $\therefore$

Nous pouvons donc, après avoir recherché l'ensemble des points de rupture possibles et après avoir déterminé le point de rupture  $R$  dont la distance  $h$  est minimale, construire le premier front de croissance à la distance  $h$  de  $F$ .

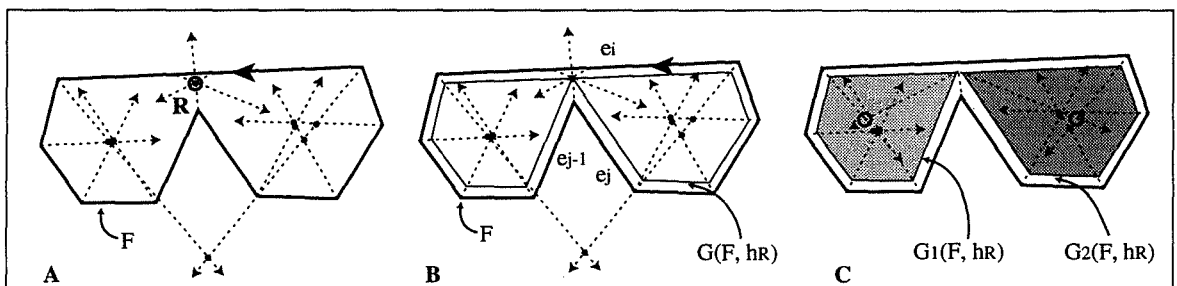


**Figure IV.29 :** Modification de l'ensemble  $S$  si le point  $R$  de  $h_{\min}$  est un point de rupture de type B.



Ce front de croissance  $G(F, h)$  peut être trouvé en construisant à l'intérieur de la forme  $F$  toutes les arêtes  $e'_i$  parallèles aux arêtes  $e_i$  de  $F$ , telles que la jonction entre deux arêtes consécutives  $e'_i$  et  $e'_{i+1}$  de  $G(F, h)$  soit située sur la bissectrice  $B(i, i+1)$ . Chacune des arêtes  $e'_i$  ainsi construites, limitées par les bissectrices  $B(i-1, i)$  et  $B(i, i+1)$ , est unique.

- Si  $R$  est issu d'une situation de type B,  $G(F, h)$  comporte 1 arête de moins que la forme  $F$  (cf. fig. IV.29). Une nouvelle bissectrice est créée entre deux arêtes  $e_{i-1}$  et  $e_{i+1}$  d'un contour  $C_n$ , et les deux arêtes  $e'_{i-1}$  et  $e'_{i+1}$  sont maintenant adjacentes sur  $G(F, h)$ .  $R$  est alors supprimé de l'ensemble des points de rupture possibles, et les deux points de rupture relatifs à  $e_{i-1}$  et  $e_{i+1}$  sont recalculés avec la nouvelle bissectrice  $B(i-1, i+1)$ .



**Figure IV.30 :** Modification de l'ensemble  $S$  si le point  $R$  de  $h_{\min}$  est un point de rupture de type C.

- Si  $R$  est engendré par une situation de type C l'ordre des arêtes et le nombre de composantes connexes du front de croissance  $G(F, h)$  est modifié. Si le point  $R$  intéresse uniquement des arêtes appartenant au même contour parallèle, le contour est déconnecté (cf. fig. IV.30). Dans le cas contraire, les deux contours parallèles d'où sont issues les arêtes impliquées par le point de rupture sont fusionnés. Dans tous les cas, les points de suture entre les arêtes nouvellement liées se situent sur les bissectrices  $B(i-1, j)$  et  $B(j, i)$ . L'ensemble  $S$  des points de rupture possibles est mis à jour en fonction de la nouvelle connexité des contours. Il faut supprimer les anciens points de rupture correspondant aux arêtes  $e'_i$ ,  $e'_j$  et  $e'_{j+1}$ , et calculer les nouveaux points de rupture relatifs aux deux nouvelles paires d'arêtes consécutives.

- Si  $R$  est un point de rupture de type D les arêtes impliquées par le point de rupture sont supprimées, ainsi que les points de rupture possibles relatifs à ces arêtes. S'il existe d'autres contours parallèles dans le front de croissance  $G(F, h)$ , la croissance peut continuer.

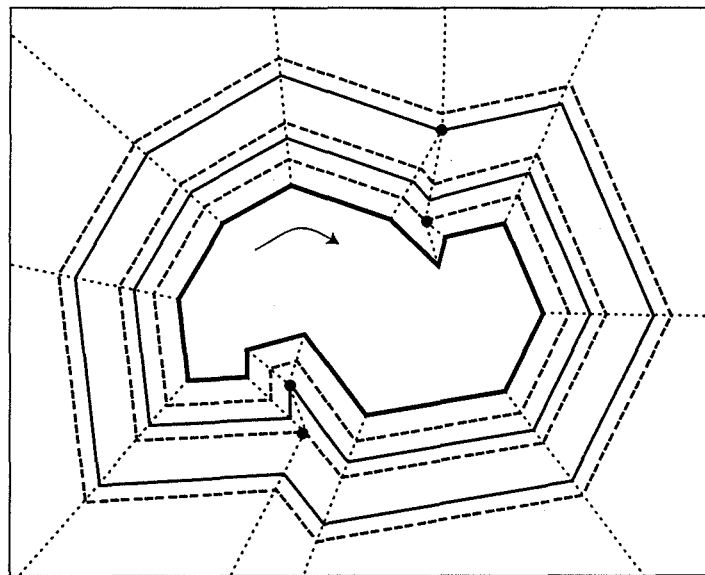
À l'issue de ces traitements, il faut remettre à jour les points de rupture de type C qui intéressent les arêtes parallèles modifiées ou supprimées. En particulier, il faut vérifier que les arêtes parallèles dont les bissectrices gauche et droite ont été modifiées ne sont pas susceptibles d'être concernées par un point de rupture de type C qui n'existait pas dans l'ensemble  $S$  précédent.

Ainsi, après la construction du dernier front de croissance  $G(F, h)$  et quel que soit le type de point de rupture rencontré, le nouveau front de croissance va être construit en tenant compte uniquement des arêtes de  $F$  qui possèdent une arête parallèle sur  $G(F, h)$ . Le nouveau point de rupture à considérer dans la suite de la croissance est celui qui est à la distance minimale des arêtes intervenant dans l'intersection. Si plusieurs points de rupture de l'ensemble  $S$  sont à une même distance  $h$  de leurs arêtes respectives, ils sont simplement traités l'un après l'autre.

La croissance se poursuit ainsi, point de rupture après point de rupture jusqu'à rencontrer un point de rupture de type D sur le dernier contour parallèle encore présent dans le front de croissance. Le processus de croissance est alors stoppé car plus aucun espace n'est utilisable. Le dernier point de rupture  $R_{\max}$  rencontré, situé à la distance  $h_{\max}$  des arêtes de  $C_n$ , est appelé point "érodé ultime". Il n'est pas possible de trouver un front de croissance valide à une distance supérieure à  $h_{\max}$ . L'ensemble des points de rupture possibles est alors vide puisqu'il ne reste plus d'arêtes sur  $G(F, h_{\max})$ .

#### • Croissance vers l'extérieur de $F$

Dans le cas d'une croissance vers l'extérieur de la forme  $F$ , il suffit d'orienter chaque contour de  $F$  dans le sens inverse. Ceci se réalise implicitement dans le déroulement de la croissance des trous d'une forme  $F$ .



**Figure IV.31 :** Croissance vers l'extérieur d'une forme  $F$ . La figure illustre les contours parallèles rencontrés aux différents points de rupture.

Lorsque l'ensemble des points de rupture possibles est vide, la connexité et l'ordre des éléments du front de croissance ne peuvent plus être modifiés. Il est clair que la croissance

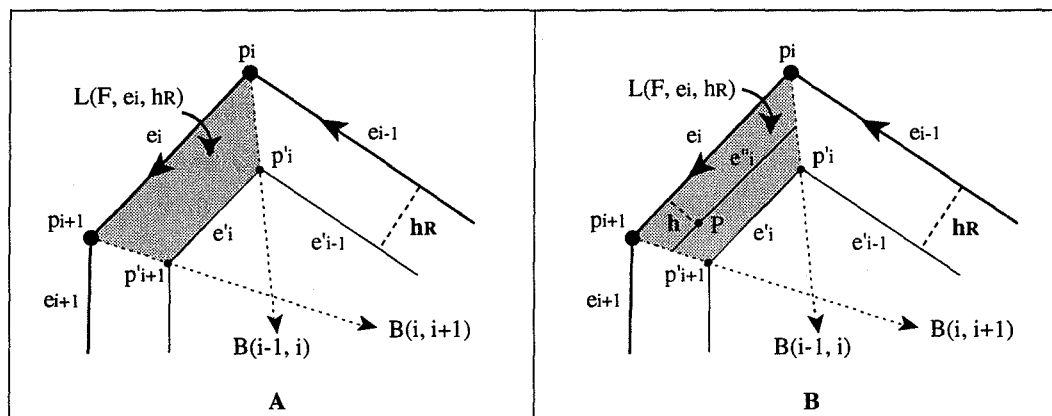
peut alors se continuer indéfiniment. En effet, il n'existe pas dans ce cas de point "érode ultime" (cf. fig. IV.31), si ce n'est un point virtuel situé à l'infini.

Si  $F$  n'est pas connexe, la croissance agglomère les différents contours parallèles de  $F$  jusqu'à obtenir un unique contour parallèle  $P$  qui ne puisse plus être modifié.

#### IV.2.1.5 - Propriétés des contours parallèles

Nous allons maintenant exposer quelques propriétés des contours parallèles qui nous serviront par la suite à définir de façon rigoureuse le réseau bissecteur.

Définissons tout d'abord la notion de "lame cristalline" relative à une arête  $e_i$  de la forme initiale.



**Figure IV.32 :** Illustration de la notion de lame cristalline relative à une arête de la forme  $F$ .

Nous nous positionnons ici tout au début de la croissance d'une forme  $F$ . Soit  $R$ , le point de rupture appartenant à l'ensemble  $S$ , dont la distance  $h_R$  à l'arête relative  $e_r$  est la plus petite ( $h_R = h_{\min}$ ). Si l'on construit  $G(F, h_R)$ , alors toutes les arêtes de  $F$ , sauf éventuellement  $e_r$ , possèdent une arête parallèle sur  $G(F, h_R)$ .

La lame cristalline de l'arête  $e_i$  à la distance  $h_R$  de  $e_i$ , notée  $L(F, e_i, h_R)$ , est définie comme le sous-espace intérieur à  $F$  compris entre  $e_i$ , les portions des deux bissectrices gauche et droite de  $e_i$ ,  $B(i-1, i)$  et  $B(i, i+1)$ , et éventuellement l'arête parallèle  $e'_i$  (cf. fig. IV.32A).

Comme tous les points  $P$  appartenant à  $L(F, e_i, h_R)$  sont situés entre la droite support de  $e'_i$  (parallèle et à la distance  $h_R$  de  $e_i$ ) et l'arête  $e_i$ , tous ces points sont donc à une distance  $h$  inférieure ou égale à  $h_R$  de l'arête  $e_i$ . D'autre part, le point  $R$ , à la distance  $h_R$  de  $e_r$ , étant le premier point de rupture rencontré, il existe un contour parallèle valide  $G(F, h)$ , à la distance  $h$  de  $F$ , qui comporte le même nombre d'arêtes que la forme  $F$ . Le front de croissance  $G(F, h)$  comporte donc une arête  $e''_i$  parallèle à  $e_i$  et à la distance  $h$  de  $e_i$ , et le point  $P$  est situé sur cette arête (cf. fig. IV.32B).

Ce qui prouve le lemme suivant :

**Lemme 10 :** *Si un point  $P$ , à la distance  $h_1$  de l'arête  $e_i$ , appartient à la lame cristalline  $L(F, e_i, h_2)$ , tel que  $h_1 \leq h_2$ , alors  $P$  appartient à l'arête  $e'_i$  parallèle et à la distance  $h_1$  de  $e_i$ .*

D'autre part, nous voulons démontrer qu'un point  $P$  ne peut appartenir qu'à un seul contour parallèle.

**Lemme 11 :** *Si  $P$  est un point quelconque de  $F$ , et si  $P$  est situé sur un contour parallèle à la distance  $h$  de  $F$ , alors  $P$  ne peut pas appartenir à un autre contour parallèle à une distance  $h_1$  de  $F$ . D'autre part, si  $P$  appartient à plus d'une arête d'un même contour parallèle,  $P$  est soit un point de suture, soit un point de rupture.*

*Preuve :* Supposons que le point  $P$  appartienne à la fois à deux contours parallèles  $G(F, h)$  et à  $G(F, h_1)$ .  $P$  est donc situé sur deux arêtes parallèles  $e'_i$  et  $e'_{i1}$  qui appartiennent respectivement à  $G(F, h)$  et à  $G(F, h_1)$ , telles que  $e'_i$  et  $e'_{i1}$  s'intersectent au point  $P$ .

Supposons que  $h$  soit égale à  $h_1$ . Si  $e'_i$  et  $e'_{i1}$  sont toutes les deux des arêtes parallèles et à la même distance de la même arête  $e_i$  de la forme  $F$ , elles représentent alors la même arête parallèle et à la distance  $h$  de  $e_i$ , et les deux contours parallèles sont identiques. Si au contraire les arêtes  $e'_i$  et  $e'_{i1}$  ne sont pas relatives à la même arête de la forme initiale, alors selon les lemmes 1, 2, 3 et 4, le point  $P$  est soit un point de suture soit un point de rupture, et il appartient au même front de croissance  $G(F, h)$ .

Considérons maintenant que  $h$  est différente de  $h_1$ . Si  $e'_i$  et  $e'_{i1}$  sont toutes les deux des arêtes parallèles à l'arête  $e_i$  de la forme initiale, les arêtes  $e'_i$  et  $e'_{i1}$  sont parallèles et ne peuvent pas s'intersecter. Ce cas est donc impossible.

Si au contraire les arêtes  $e'_i$  et  $e'_{i1}$  ne sont pas relatives à la même arête de la forme initiale, supposons alors sans perte de généralité que  $h_1$  est supérieure à  $h$ . Dans ce cas construire  $G(F, h_1)$  est équivalent à construire  $G(G(F, h), h_1 - h)$ .

Au moment de la construction de  $G(F, h)$ ,  $P$  n'appartient qu'à l'arête  $e'_i$  du contour parallèle  $G(F, h)$ . Pour qu'à l'étape suivante, c'est-à-dire au moment de la construction du contour parallèle  $G(G(F, h), h_1 - h)$ , le point  $P$  soit situé sur  $e'_{i1}$ , il faut que cette arête parallèle ait "rencontré" l'arête parallèle issue de  $e_i$ , ou l'une de ses voisines, lors de la construction des contours parallèles à des distances variant de  $h$  à  $h_1$ .

Cette "rencontre" doit induire un point de rupture, et d'après les lemmes 2, 3 et 4, aucune des arêtes ne peut en franchir une autre (cf. fig. IV.20, IV.23B, IV.25). Ce cas est donc impossible et  $P$  ne peut donc appartenir qu'à un contour parallèle et un seul.  $\therefore$

A partir de ce lemme nous pouvons démontrer que :

**Lemme 12 :** *Tous les contours parallèles à  $F$  sont strictement à l'intérieur de  $F$ .*

*Preuve :* Si ce n'est pas le cas, il existe un contour  $G(F, h)$  qui intersecte le contour  $G(F, 0)$ . D'après le lemme précédent cela n'est pas possible, et un contour parallèle valide  $G(F, h)$  est strictement à l'intérieur de  $F$ .  $\therefore$

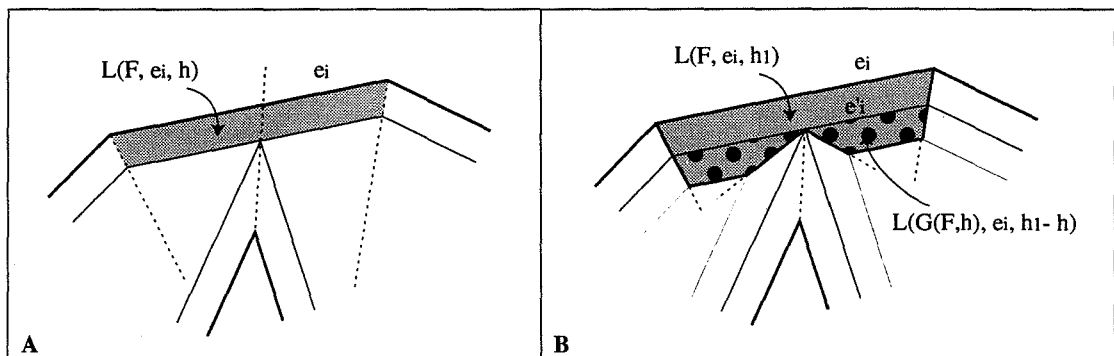
**Lemme 13 :** *Toute lame cristalline  $L(F, e_i, h)$  est connexe.*

*Preuve :* Si une lame cristalline  $L(F, e_i, h)$  est connexe, alors quels que soient deux points  $p$  et  $q$  appartenant à  $L(F, e_i, h)$ , il existe au moins un chemin entièrement compris dans  $L(F, e_i, h)$  qui relie  $p$  et  $q$ . Si ce n'est pas le cas, un chemin entre  $p$  et  $q$  intersecte soit une arête initiale  $e_j$ , soit une bissectrice ou une arête parallèle relative à une autre arête initiale  $e_j$ . L'intersection entre l'intérieur de  $L(F, e_i, h)$  et de  $L(F, e_j, h)$  est non vide, et il existe un point  $Q$  situé à la fois sur une arête parallèle à la distance  $h_1$  de  $e_i$  et sur une arête parallèle à la distance  $h_2$  de  $e_j$ , ce qui d'après le lemme 11 n'est possible que si  $h_1$  est égale à  $h_2$  et si les deux arêtes parallèles ne partagent qu'un seul point, de suture ou de rupture, confondu avec  $Q$ .  $Q$  est alors sur la frontière des deux lames cristallines et  $L(F, e_i, h)$  est bien connexe.  $\therefore$

Nous avons montré que si deux arêtes sont adjacentes sur  $F$ , alors leurs lames cristallines ont en commun une bissectrice.

Comme par ailleurs chaque lame cristalline est connexe, tout point du sous-espace intérieur de la forme  $F$  situé entre  $F$  et  $G(F, h_R)$  appartient soit à une lame cristalline unique soit à une bissectrice partagée par au moins deux lames cristallines. De plus, tout point  $P$  de ce sous-espace qui appartient à une lame cristalline  $L(F, e_i, h_R)$  et à la distance  $h$  de  $e_i$ , est situé sur l'arête  $e'_i$  du contour parallèle  $G(F, h)$ .

A partir de  $G(F, h)$ , nous pouvons relancer la croissance jusqu'au prochain point de rupture  $R_1$ , et ainsi de suite jusqu'à atteindre le point de rupture érodé ultime, s'il existe. A chaque croissance, nous définissons pour chaque arête  $e_i$  du dernier front d'onde  $G(F, h_1)$  une nouvelle lame cristalline  $L(G(F, h), e_i, h_1 - h)$ .



**Figure IV.33 :** Évolution des lames cristallines au cours de la croissance.

Comme chaque arête parallèle d'un contour parallèle  $G(F, h)$  joue le rôle d'arête initiale pour le nouveau stade de croissance à partir de  $G(F, h)$ , deux lames cristallines de deux fronts de croissance consécutifs, toutes deux relatives à la même arête de  $F$ , partagent une arête parallèle (cf. fig. IV.33B).

L'union de ces deux lames cristallines, notée  $L(F, e_i, h_1)$ , est formée par l'ensemble des bissectrices des deux lames, par l'arête  $e_i$  de la forme initiale, et par la dernière arête parallèle du front de croissance  $G(F, h_1)$ . Comme chaque lame cristalline est connexe, cette union reste connexe (cf. fig. IV.33B).

Nous allons maintenant examiner une caractéristique importante des lames cristallines qui est leur monotonie.

Pour cela nous allons examiner l'agencement local des bissectrices au niveau des points de rupture de type C et B. Nous voulons démontrer que cet agencement n'est pas quelconque et qu'il vérifie une propriété de monotonie par rapport à la direction de l'arête considérée.

Commençons par examiner la situation au niveau d'un point de rupture de type C.

- Point de rupture I de type C entre les arêtes  $e_i, e_j$  et  $e_{j+1}$ .

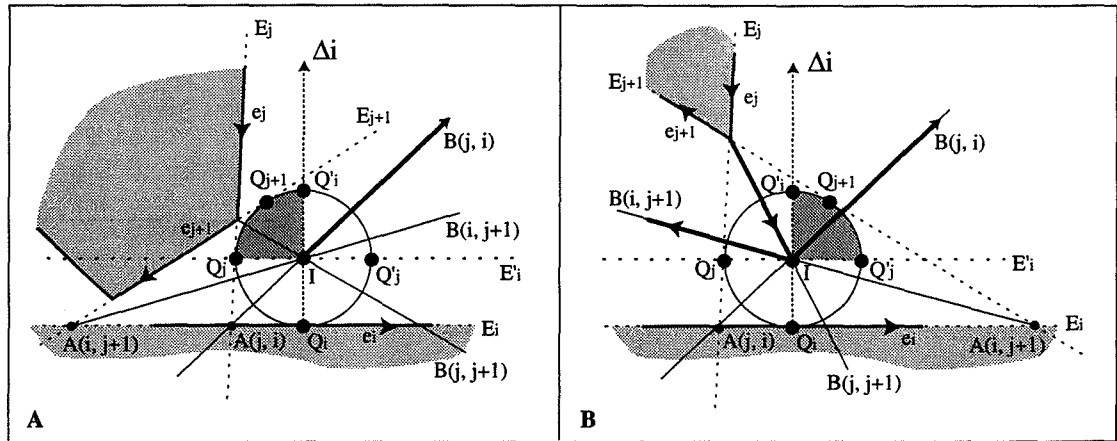
Soit  $C$  le cercle tangent inscrit relatif aux droites  $E_i, E_j$  et  $E_{j+1}$  et situé respectivement à gauche de  $e_i, e_j, e_{j+1}$  (à l'intérieur de la forme), tel que le centre  $I$  de  $C$  soit le point de rencontre des trois bissectrices  $B(i, j), B(j, j+1), B(i, j+1)$ .  $D(I, e_i)$  est donc le rayon du cercle  $C$ . La frontière de  $C$  est parcourue arbitrairement dans le sens horaire. Soit  $Q_i$  le point de tangence de  $e_i$  sur  $C$ , et  $Q'_i$  le point diamétralement opposé à  $Q_i$  sur  $C$ . Soit  $\Delta_i$  la droite verticale à  $e_i$  issue de  $Q_i$  et passant par  $I$ . La droite  $\Delta_i$  est orientée de  $Q_i$  vers  $Q'_i$ .

$B(j, i)$  est entièrement située au-dessus de  $E'_i$  car les points de la bissectrice nouvellement créée sont à une distance de  $e_i$  supérieure à  $D(I, e_i)$ . Ils ne peuvent donc pas appartenir à la lame cristalline  $L(F, e_i, D(I, e_i))$ . Soit  $A(j, i)$  le point d'intersection entre  $B(j, i)$  et  $E_i$ .

- 1 - Supposons que le point  $A(j, i)$  soit à gauche de  $\Delta_i$ .

La tangente à  $C$  passant par  $A(j, i)$  définit  $E_j$ , la droite support de  $e_j$ . Soit  $Q_j$  ce point de tangence. Par construction de  $B(j, i)$ ,  $Q_j$  appartient à la partie du cercle située à gauche de  $\Delta_i$ .

Pour que  $B(j, j+1)$  soit à gauche de  $e_j$  et de  $e_{j+1}$ , et pour que cette bissectrice passe par le point  $I$ , il faut que  $Q_{j+1}$ , le point de tangence de  $E_{j+1}$ , soit sur la partie du cercle située entre  $Q_j$  et  $Q'_j$ . Si ce n'est pas le cas, la position de la bissectrice  $B(j, j+1)$  contredit la définition que nous avons donnée des bissectrices de deux arêtes.



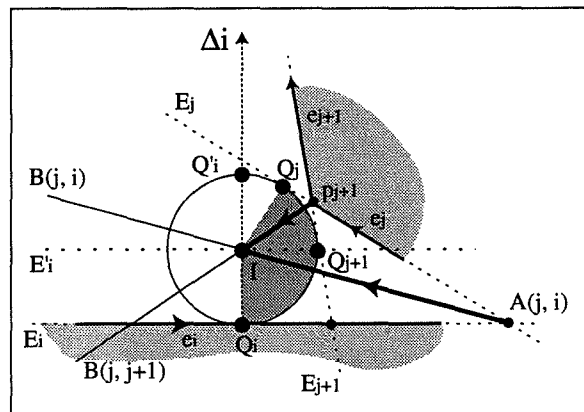
**Figure IV.34 :** Configuration locale autour d'un point de rupture de type C.  
 La figure A illustre l'impossibilité pour que  $B(i, j+1)$  soit à gauche de  $\Delta_i$  (dans ce cas I est de type B).  
 La figure B montre la seule possibilité pour un point de rupture de type C où  $B(i, j+1)$  et  $B(j, i)$  sont respectivement à droite et à gauche de  $\Delta_i$ .

D'autre part, si  $Q_{j+1}$  appartient à la frontière du cercle située entre  $Q'_j$  et  $Q'_i$  (cf. fig. IV.34A), alors  $e_{j+1}$  et  $e_i$  convergent, et d'après le lemme 6, I n'est pas un point de rupture de type C, mais de type B, ce qui contredit notre hypothèse. Le point de tangence  $Q_{j+1}$  est donc bien situé entre  $Q'_i$  et  $Q'_j$  (cf. fig. IV.34B).

Quelle que soit la situation du point  $Q_{j+1}$  entre  $Q'_i$  et  $Q'_j$ , la droite  $E_{j+1}$  intersecte  $E_i$  en un point  $A(i, j+1)$  situé à droite de  $\Delta_i$ . La partie valide de la bissectrice  $B(i, j+1)$ , issue de  $A(i, j+1)$  et passant par I, est donc située à gauche de  $\Delta_i$ .

2 - Supposons maintenant que le point  $A(j, i)$  soit à droite de  $\Delta_i$ .

Par construction  $Q_j$  appartient à la partie du cercle situé à droite de  $\Delta_i$ . Dans ce cas  $D(p_{j-1}, e_i) < D(p_j, e_i)$ ,  $e_i$  et  $e_j$  convergent et I n'est pas un point de rupture de type C, mais de type B ce qui contredit notre hypothèse de base (cf. fig. IV.35). Ce cas est donc impossible.



**Figure IV.35 :** Configuration locale autour d'un point de rupture où  $A(j, i)$  est à droite de  $\Delta_i$ .  
 Ce cas de figure induit un point de rupture de type B et non de type C.

En conclusion nous pouvons énoncer le lemme suivant :

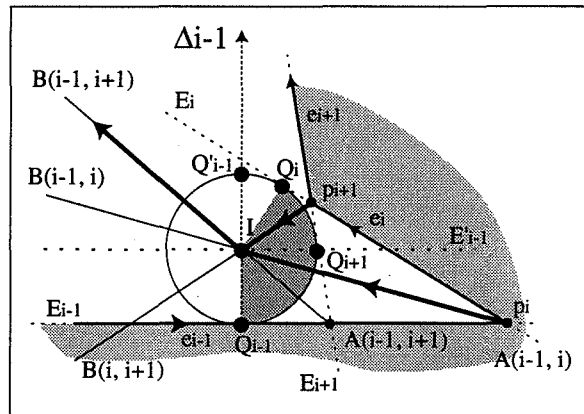
**Lemme 14 :** *Si  $I$  est un point de rupture valide de type C entre  $e_i$ ,  $e_j$  et  $e_{j+1}$ , alors  $B(j, i)$  est à droite de  $\Delta_i$ , perpendiculaire à l'arête  $e_i$  issue du point  $I$ , et  $B(i, j+1)$  est à gauche de  $\Delta_i$ .*

- Point de rupture  $I$  de type B entre les arêtes  $e_{i-1}$ ,  $e_i$  et  $e_{i+1}$ .

Nous reprenons les mêmes notations que ci-dessus.

Si les deux sommets  $p_i$  et  $p_{i+1}$  sont convexes, il n'est pas difficile de voir que  $B(i-1, i+1)$  est à gauche de  $\Delta_{i-1}$ .

Supposons maintenant et sans perte de généralité, que le sommet  $p_i$  soit convexe et que  $p_{i+1}$  soit concave. Puisque  $p_i$  est convexe,  $Q_i$  est situé sur la frontière du cercle entre  $Q'_{i-1}$  et  $Q_{i-1}$ . Pour que  $B(i, i+1)$  soit à gauche de  $e_{i+1}$  et pour que cette bissectrice passe par le point  $I$  (si  $I$  est un point de rupture c'est l'intersection des trois bissectrices), il faut que  $Q_{i+1}$  soit situé sur la frontière de  $C$  entre  $Q_i$  et  $Q_{i-1}$ . En conséquence, il est donc situé, quel que soit  $Q_i$ , entre  $Q'_{i-1}$  et  $Q_{i-1}$ . Le point  $A(i-1, i+1)$  est donc à droite de  $\Delta_{i-1}$  et la bissectrice  $B(i-1, i+1)$ , est à gauche de  $\Delta_{i-1}$  (cf. fig. IV.36).



**Figure IV.36 :** Configuration locale autour d'un point de rupture de type B.  
Les bissectrices  $B(i-1, i+1)$  et  $B(i-1, i)$  ne peuvent être respectivement qu'à gauche et à droite de  $\Delta_{i-1}$ .

Il suffit d'inverser la figure pour obtenir le résultat inverse pour le point de rupture issu de  $p_{i-1}$ .

Ceci et le lemme 14 permettent de démontrer le lemme suivant :

**Lemme 15 :** *Soit  $L(F, e_i, h)$  la lame cristalline de  $e_i$  à la distance  $h$  de  $F$ ,  $0 < h < h_{\max}$ . Soit  $Ch$  la chaîne de segments composée par l'ensemble des bissectrices relatives à  $e_i$ , à l'exception de  $B(i-1, i)$  et de  $B(i, i+1)$ . Comme chaque sommet  $q$  de  $Ch$  possède une bissectrice à gauche et une bissectrice à droite de la verticale à  $E_i$  passant par  $q$ , la chaîne  $Ch$  est monotone par rapport à la direction de  $E_i$ .*



## IV.2.2 - Définitions et propriétés du réseau bissecteur d'une forme polygonale

Les propriétés énoncées dans la section précédente nous amènent à la définition suivante :

• **Définition A :** Une "cellule" d'une arête  $e_i$  de  $F$ , notée  $V(i)$ , est définie comme l'union de toutes les lames cristallines issues de la croissance de  $F$  et relatives à l'arête initiale  $e_i$ .  $V(i)$  est connexe et la chaîne de bissectrices qui la compose, moins  $B(i-1, i)$  et  $B(i, i+1)$ , est monotone dans la direction de  $e_i$ . Une cellule  $V(i)$  est éventuellement non bornée si, selon nos conventions, la croissance a lieu vers l'extérieur de  $F$ .

Étant donné que les lames cristallines sont jointives deux à deux, l'union de toutes les cellules des arêtes de  $F$  couvre la totalité de la forme  $F$ . Ceci nous permet d'énoncer le théorème suivant :

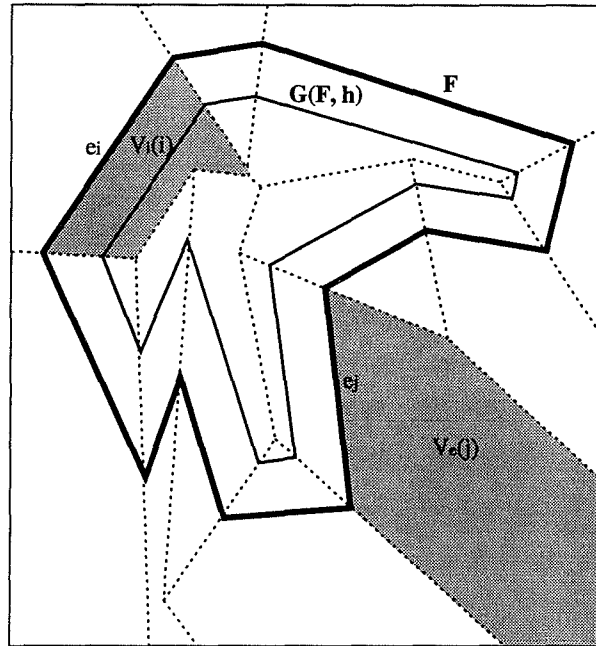
**Théorème 1 :** *Par tout point  $P$  appartenant à  $F$ , il passe un contour parallèle et un seul.*

**Preuve :** Comme chaque cellule est connexe et que les bissectrices limitant les cellules sont partagées par exactement deux cellules, l'union de toutes les cellules couvre la totalité de la forme  $F$ . Un point  $P$  quelconque situé à l'intérieur de  $F$  appartient alors forcément soit à une cellule  $V(i)$  unique (i) soit à plusieurs cellules. Dans ce dernier cas il se situe soit sur une seule bissectrice, c'est alors un point de suture (ii), soit à l'intersection de plusieurs (au moins trois) bissectrices (iii), et c'est donc un point de rupture. Dans tous les cas,  $P$  appartient au contour parallèle unique  $G(F, h_P)$  et il est respectivement situé sur l'arête parallèle  $e'_i$  (i), à l'intersection de deux arêtes parallèles  $e'_i$  et  $e'_{i+1}$  (ii), à l'intersection de plusieurs arêtes parallèles de  $G(F, h_P)$  (iii). ∴

**Corollaire :** *Un point  $P$  situé à la distance  $h_P$  de  $e_i$  appartient à la cellule  $V(i)$  si et seulement si,  $P$  appartient à l'arête  $e'_i$  du contour parallèle  $G(F, h_P)$  à la distance  $h_P$  de  $F$ .*

Donnons maintenant la principale définition de ce chapitre :

• **Définition B :** Le "réseau bissecteur" interne  $RB_i$  (respectivement externe  $RB_e$ ) d'une forme  $F$  est l'ensemble des points situés à l'intérieur de  $F$  (respectivement à l'extérieur de  $F$ ) et appartenant à au moins deux cellules  $V(i)$  et  $V(j)$  relatives à deux arêtes  $e_i$  et  $e_j$  de  $F$ . L'union des réseaux bissecteurs internes et externes  $RB_i$  et de  $RB_e$  forme le réseau bissecteur de  $F$  (cf. fig. IV.37).

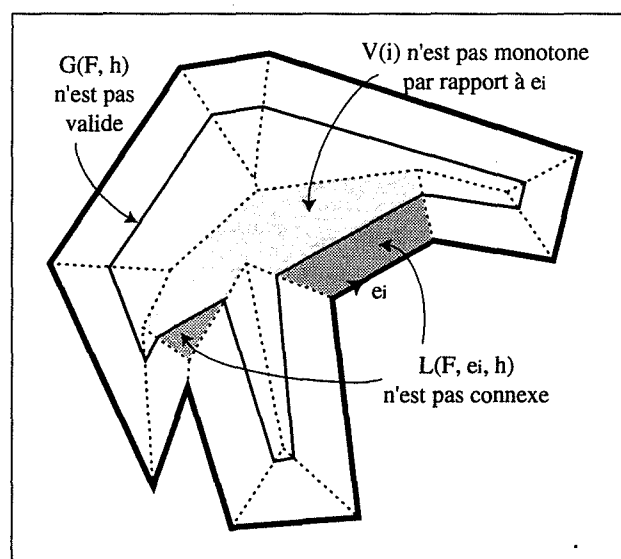


**Figure IV.37 :** Réseaux bissecteurs interne et externe d'une forme polygonale  $F$ . Un contour parallèle  $G(F, h)$  à la distance  $h$  de  $F$ . Mise en évidence de deux cellules  $V_i(i)$  et  $V_e(j)$  appartenant respectivement au réseau bissecteur interne et externe de  $F$ .

L'unicité du réseau bissecteur est inhérente à la définition des cellules :

**Théorème 2 :** *Le réseau bissecteur d'une forme  $F$  est unique.*

*Preuve :* Puisque le réseau bissecteur de  $F$  est l'ensemble des points appartenant à la frontière des cellules  $V(i)$ , et que d'après leur construction ces cellules sont uniques (lemmes 1, 2, 3, 4, 11), le réseau bissecteur est unique.  $\therefore$



**Figure IV.38 :** Illustration d'une combinaison de bissectrices de  $F$  qui **n'est pas** le réseau bissecteur de  $F$ .  $G(F, h)$  n'est pas valide. Les lames cristallines de  $e_i$  ne sont pas connexes, la cellule  $V(i)$  n'est donc pas monotone par rapport à  $e_i$ .

Moins formellement, le réseau bissecteur d'une forme  $F$  est une composition des bissectrices des différentes arêtes de  $F$ .

En revanche, toute combinaison de bissectrices de  $F$  n'est pas un réseau bissecteur de  $F$ . L'exemple de la figure IV.38 montre un contre-exemple où la connexité et la monotonie des cellules sont violées.

### • *Propriétés du réseau bissecteur*

Le réseau bissecteur possède la même structure qu'un diagramme de Voronoï généralisé (DVG), mais est calculé à partir des seules arêtes du polygone et non plus à partir des arêtes et des sommets concaves comme dans le cas du DVG. Il est composé uniquement d'éléments linéaires qui sont les bissectrices entre les  $N$  arêtes de  $F$ , et qui partitionnent l'intérieur et l'extérieur de  $F$  en  $N$  cellules, chacune relative à une arête de  $F$ . Ces cellules sont monotones par rapport à la direction de leur arête respective.

**Lemme 16 :** Le réseau bissecteur est un graphe planaire.

*Preuve :* Comme toute intersection entre deux bissectrices induit un point de rupture et que chaque cellule est connexe, le réseau bissecteur est un graphe planaire.  $\therefore$

Une caractéristique importante du réseau bissecteur interne d'une forme  $F$  est son homotopie. Ainsi, il comporte autant de composantes connexes que la forme  $F$ , et possède autant de cycles que la forme comporte de trous.

Un sommet du graphe est le point de rencontre d'au moins trois bissectrices, et est donc le centre du cercle inscrit aux trois arêtes relatives à ces bissectrices et situé à gauche de ces trois bissectrices (situé complètement à l'intérieur de la forme).

De par la connexité des cellules, une arête possède une seule cellule interne et une seule cellule externe. De plus, une arête ne peut être partagée que par deux cellules du réseau bissecteur.

NB: Par la suite, le terme réseau bissecteur de  $F$  désignera le réseau bissecteur interne de la forme polygonale  $F$

Nous pouvons déterminer le nombre de sommets et d'arêtes du réseau bissecteur d'un polygone  $C_n$  :

**Lemme 17 :** *Si  $C_n$  comporte  $n$  arêtes et  $T$  trous, le nombre maximum de sommets est donné par  $(2n - 2 + 2T)$ , et le nombre d'arêtes par  $(2n - 3 + 3T)$ . Le nombre total de sommets et d'arêtes du réseau bissecteur est donc en  $O(n)$ .*

*Preuve :* Notons  $v$  le nombre total de sommets et  $e$  le nombre total d'arêtes du réseau bissecteur de  $C_n$ . Alors,  $v = n + v_{\text{int}}$ , où  $v_{\text{int}}$  est le nombre de sommets internes à RB (non situés sur la frontière de  $C_n$ ), et  $e = n + e_{\text{int}}$ , où  $e_{\text{int}}$  est le nombre d'arêtes internes à RB (non issues directement d'un sommet de  $C_n$ ).

- Supposons dans un premier temps que  $C_n$  soit un polygone sans trou.

Si chaque sommet est de degré 3, chaque sommet interne est le point de rencontre de 3 bissectrices, mais chaque sommet interne partage avec son suivant une bissectrice commune, sauf le dernier sommet.

Nous pouvons donc écrire que  $e = 3v_{\text{int}} - (v_{\text{int}} - 1)$ , ce qui donne  $e = 2v_{\text{int}} + 1$ . (1)

Comme le réseau bissecteur de  $C_n$  est un graphe planaire, nous pouvons appliquer la relation d'Euler :  $v - e + f = 2$ , où  $f$  est le nombre de faces connexes du graphe. Comme dans ce cas  $f = 1$ , si on remplace  $e$  par sa valeur on obtient :

$$v - (2v_{\text{int}} + 1) = 1 \Leftrightarrow v_{\text{int}} + n - 2v_{\text{int}} - 1 = 1, \text{ ce qui donne :}$$

$$v_{\text{int}} = n - 2 \text{ et } v = 2n - 2.$$

En substituant dans (1) nous avons donc,  $e = 2n - 4 + 1$  soit :

$$e_{\text{int}} = n - 3 \text{ et } e = 2n - 3.$$

- Si  $C_n$  comporte  $T$  trous, chaque trou crée un cycle et connecte donc 2 sommets.

L'égalité (1) est alors modifiée :  $e = 3v_{\text{int}} - (v_{\text{int}} - 1 + T)$  soit  $e = 2v_{\text{int}} - T + 1$ . (2)

Chaque cycle crée une nouvelle face et la relation d'Euler s'écrit :

$$v - (2v_{\text{int}} - T + 1) = 1 - T, \text{ ce qui donne :}$$

$$v_{\text{int}} = n - 2 + 2T \text{ et } v = 2n - 2 + 2T.$$

En substituant dans (2) nous obtenons :

$$e_{\text{int}} = n - 3 + 3T \text{ et } e = 2n - 3 + 3T. \quad \therefore$$

## IV.3 - Algorithme de construction

Nous avons pu implémenter deux algorithmes de construction du réseau bissecteur. Le premier est directement inspiré de la méthode de croissance cristalline et construit le réseau bissecteur en partant du contour du polygone vers le "centre" de celui-ci.

Étant donné que le réseau bissecteur a une structure proche de celle du DVG, il semblait naturel d'étendre les algorithmes utilisés pour la construction du DVG à celle du réseau bissecteur, afin de rechercher une solution de complexité similaire à la construction du DVG. Parmi tous ceux proposés dans la littérature citons les algorithmes en  $O(n \log n)$  par division et fusion de Lee [LEE 82] et de Yap [YAP 87], par balayage de [FORT 87], et l'algorithme dynamique en  $O(n^2)$  de Yao et al. [YARO 90].

Nous avons choisi d'implémenter un algorithme par division et fusion proche de celui de Lee pour sa relative facilité de mise en œuvre.

L'algorithme par croissance a une complexité en  $O((n_c * n) \log n)$  où  $n_c$  est le nombre de sommets concaves du polygone, soit  $O(n^2 \log n)$  dans le pire des cas pour un espace en  $O(n_c * n)$  soit  $O(n^2)$ . Il est entièrement démontré par la méthode de croissance cristalline décrite dans la section IV.2.

Le deuxième algorithme que nous proposons, en division et fusion, a une complexité en  $O(n^2)$  pour un espace linéaire. Cette complexité provient du fait que la procédure de fusion est en théorie quadratique. Nous verrons que dans les cas pratiques la fusion est quasiment linéaire, et c'est pourquoi nous utilisons dans notre application l'algorithme par division et fusion.

D'autre part, la mise au point d'une procédure de fusion théoriquement linéaire est un problème ouvert, alors que la phase d'initialisation en  $O(n^2 \log n)$  de l'algorithme par croissance semble incontournable.

Nous allons tout d'abord donner une brève description de l'algorithme par croissance qui reprend beaucoup de notions énoncées précédemment.

Nous exposerons ensuite l'algorithme par division et fusion en commençant par la construction du réseau bissecteur pour un contour polygonal, unique, simple et sans trou, puis l'algorithme général traitant des contours simples troués. Enfin, nous verrons l'application directe de cet algorithme au traitement du réseau bissecteur externe (similaire au Squelette par Zones d'Influence (SKIZ)).

### IV.3.1 - Algorithme de construction par croissance

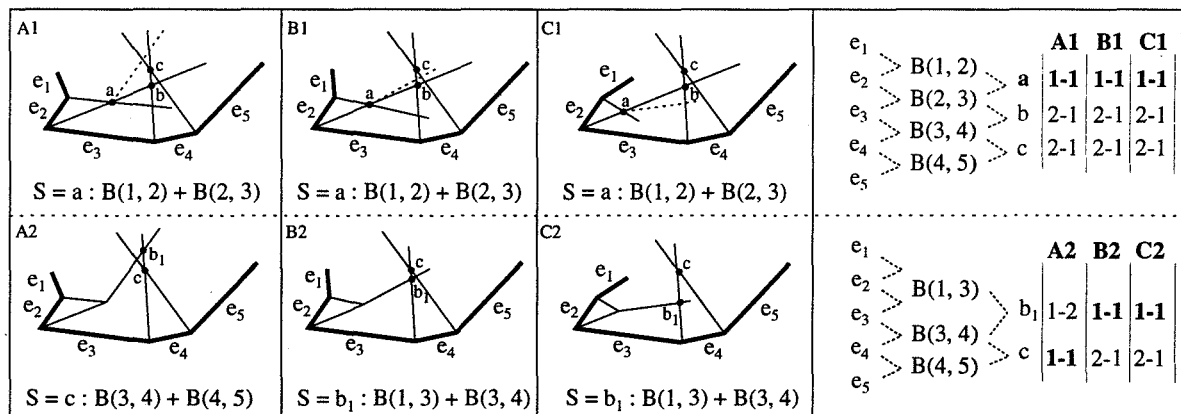
Cet algorithme construit le réseau bissecteur en suivant la même progression que celle des contours parallèles (cf. § IV.2.1.4). Il nécessite une phase d'initialisation de l'ensemble S des différents points de rupture possibles, suivie de phases de mise à jour à chaque extraction de l'élément minimum de S. A chaque extraction d'un sommet R de S, le réseau bissecteur est correct jusqu'au contour parallèle  $G(F, D(R, e_R))$ . La construction progresse ainsi, de points de rupture en points de rupture, jusqu'à arriver au dernier point de rupture qui est de type D.

#### IV.3.1.1 - Initialisation de l'algorithme

La première étape consiste à calculer l'ensemble des bissectrices issues de chacun des sommets du polygone.

• *Détermination des points de rupture de type B :*

Ensuite, il faut tester et éventuellement calculer le point d'intersection I entre chaque couple de bissectrices consécutives et calculer sa distance à l'arête considérée. Nous obtenons ainsi pour chaque bissectrice au plus deux points d'intersection avec les bissectrices précédente et suivante dans la liste. Ces deux points sont classés en fonction de leur distance à l'arête considérée.



**Figure IV.39 :** Il est suffisant de conserver dans l'ensemble S que les points de rupture de type 1-1.

Dans les trois cas, b ne peut pas exister par la suite et il est remplacé par  $b_1$ .

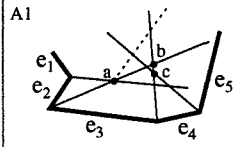
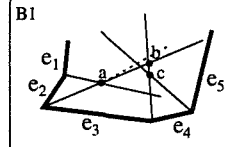
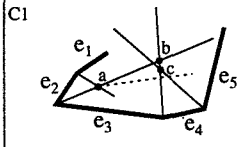
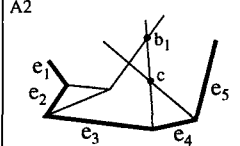
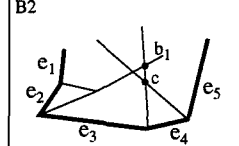
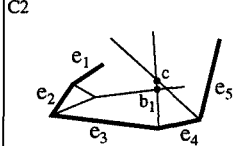
**A2 :** Comme c est maintenant 1-1 il peut être inséré dans l'ensemble S.

**B2 et C2 :**  $b_1$  est inséré dans S. c étant toujours de type 2-1, il n'intègre pas S.

Les deux points d'intersection de chaque bissectrice  $B(i-1, i)$  peuvent donc être numérotés en fonction de leur distance à leur arête relative :

- 1-1 : c'est le point d'intersection le plus proche des arêtes  $e_{i-1}, e_i$ .
- 1-2 : I est plus proche d'une seule arête.
- 2-2 : I est le point le plus éloigné des deux arêtes.

Dans le cadre de la simulation d'une croissance cristalline, seuls les points d'intersection de type 1-1 peuvent éventuellement devenir des points de rupture de type B valides. En effet, dans les autres cas les bissectrices voisines vont se combiner avant de toucher le point d'intersection de type 1-2 ou 2-2 car elles se situent à une distance moins grande du contour (cf. fig. IV.39). Cela réduit le nombre de points de rupture de type B initiaux à  $n/2$  au maximum, soit un nombre de points de rupture de type B en  $O(n)$ .

<div>A1</div> <div></div> <div><math>S = a : B(1, 2) + B(2, 3)</math> <math>c : B(3, 4) + B(4, 5)</math></div>	<div>B1</div> <div></div> <div><math>S = a : B(1, 2) + B(2, 3)</math> <math>c : B(3, 4) + B(4, 5)</math></div>	<div>C1</div> <div></div> <div><math>S = a : B(1, 2) + B(2, 3)</math> <math>c : B(3, 4) + B(4, 5)</math></div>	<div><table><tr><td><math>e_1</math></td><td><math>\triangleright</math></td><td><math>B(1, 2)</math></td><td><math>\triangleright</math></td><td>a</td><td><b>A1</b></td><td><b>B1</b></td><td><b>C1</b></td></tr><tr><td><math>e_2</math></td><td><math>\triangleright</math></td><td><math>B(2, 3)</math></td><td><math>\triangleright</math></td><td>b</td><td>1-1</td><td>1-1</td><td>1-1</td></tr><tr><td><math>e_3</math></td><td><math>\triangleright</math></td><td><math>B(3, 4)</math></td><td><math>\triangleright</math></td><td>c</td><td>2-2</td><td>2-2</td><td>2-2</td></tr><tr><td><math>e_4</math></td><td><math>\triangleright</math></td><td><math>B(4, 5)</math></td><td><math>\triangleright</math></td><td>c</td><td>1-1</td><td>1-1</td><td>1-1</td></tr><tr><td><math>e_5</math></td><td><math>\triangleright</math></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table></div>	$e_1$	$\triangleright$	$B(1, 2)$	$\triangleright$	a	<b>A1</b>	<b>B1</b>	<b>C1</b>	$e_2$	$\triangleright$	$B(2, 3)$	$\triangleright$	b	1-1	1-1	1-1	$e_3$	$\triangleright$	$B(3, 4)$	$\triangleright$	c	2-2	2-2	2-2	$e_4$	$\triangleright$	$B(4, 5)$	$\triangleright$	c	1-1	1-1	1-1	$e_5$	$\triangleright$						
$e_1$	$\triangleright$	$B(1, 2)$	$\triangleright$	a	<b>A1</b>	<b>B1</b>	<b>C1</b>																																				
$e_2$	$\triangleright$	$B(2, 3)$	$\triangleright$	b	1-1	1-1	1-1																																				
$e_3$	$\triangleright$	$B(3, 4)$	$\triangleright$	c	2-2	2-2	2-2																																				
$e_4$	$\triangleright$	$B(4, 5)$	$\triangleright$	c	1-1	1-1	1-1																																				
$e_5$	$\triangleright$																																										
<div>A2</div> <div></div> <div><math>S = c : B(3, 4) + B(4, 5)</math></div>	<div>B2</div> <div></div> <div><math>S = c : B(3, 4) + B(4, 5)</math></div>	<div>C2</div> <div></div> <div><math>S = b_1 : B(1, 3) + B(3, 4)</math></div>	<div><table><tr><td><math>e_1</math></td><td><math>\triangleright</math></td><td><math>B(1, 3)</math></td><td><math>\triangleright</math></td><td><math>b_1</math></td><td><b>A2</b></td><td><b>B2</b></td><td><b>C2</b></td></tr><tr><td><math>e_2</math></td><td><math>\triangleright</math></td><td></td><td></td><td></td><td>1-2</td><td>1-2</td><td>1-1</td></tr><tr><td><math>e_3</math></td><td><math>\triangleright</math></td><td><math>B(3, 4)</math></td><td><math>\triangleright</math></td><td>c</td><td>1-1</td><td>1-1</td><td>2-1</td></tr><tr><td><math>e_4</math></td><td><math>\triangleright</math></td><td><math>B(4, 5)</math></td><td><math>\triangleright</math></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td><math>e_5</math></td><td><math>\triangleright</math></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table></div>	$e_1$	$\triangleright$	$B(1, 3)$	$\triangleright$	$b_1$	<b>A2</b>	<b>B2</b>	<b>C2</b>	$e_2$	$\triangleright$				1-2	1-2	1-1	$e_3$	$\triangleright$	$B(3, 4)$	$\triangleright$	c	1-1	1-1	2-1	$e_4$	$\triangleright$	$B(4, 5)$	$\triangleright$					$e_5$	$\triangleright$						
$e_1$	$\triangleright$	$B(1, 3)$	$\triangleright$	$b_1$	<b>A2</b>	<b>B2</b>	<b>C2</b>																																				
$e_2$	$\triangleright$				1-2	1-2	1-1																																				
$e_3$	$\triangleright$	$B(3, 4)$	$\triangleright$	c	1-1	1-1	2-1																																				
$e_4$	$\triangleright$	$B(4, 5)$	$\triangleright$																																								
$e_5$	$\triangleright$																																										

**Figure IV.40** : Il est suffisant de conserver dans l'ensemble S que les points de rupture de type 1-1.

Dans les trois cas, b ne peut pas exister par la suite et il est remplacé par  $b_1$ .

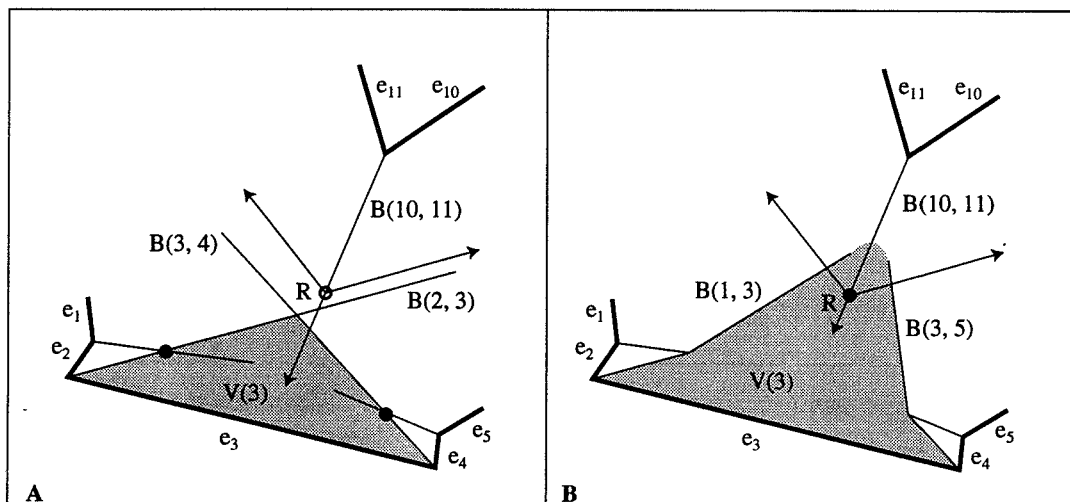
**B2** : Comme  $b_1$  n'est pas de type 1-1, aucun point n'est ajouté dans S.

**C2** :  $b_1$  est inséré dans S alors que c, maintenant de type 2-1, en est retiré.

#### • Détermination des points de rupture de type C :

Dans une deuxième phase, il est nécessaire de déterminer l'ensemble des points de rupture potentiels de type C pouvant être issus des  $n_c$  sommets concaves. Nous devons tester pour chaque sommet concave l'ensemble des  $n-2$  arêtes afin de déterminer, en accord avec les lemmes 6 et 7, le (ou les) point(s) de rupture éventuellement engendré(s) par ce sommet.

Le lemme 6 décrit une situation où un sommet peut induire un point de rupture de type C à l'itération suivante. Nous avons ici besoin d'une vision plus large, puisque le point de rupture peut, en fonction de sa distance, apparaître bien plus tard.



**Figure IV.41 :** Bien que R ne corresponde pas à tous les critères nécessités par le lemme 6, il doit quand même être considéré car l'évolution du réseau peut le réactiver.

Donc, conformément au lemme 15 mettant en avant la monotonie des cellules, nous ne nous préoccupons que de savoir si le point de rupture est compris entre les bissectrices de l'arête considérée, si celles-ci sont issues de sommets concaves, ou entre les normales aux sommets quand ces derniers sont convexes (cf. fig. IV.41A). Ceci nous permet de prendre en compte tous les cas de figure possibles au cours de l'évolution du réseau bissecteur (cf. fig. IV.41B). Il faut en plus, dans un premier temps, ne pas s'occuper de l'intersection avec les deux bissectrices voisines à celle issue du sommet concave.

D'autre part, à cause de la modification des cellules au cours de la construction, un point de rupture de type C issu d'un sommet  $p_i$  qui est valide à un instant donné peut devenir caduque à l'itération suivante. Il faut donc considérer pour la suite un autre point de rupture de type C éventuellement induit par la même bissectrice issue de  $p_i$ . En effet, le lemme 7 n'est démontré que pour un point de rupture  $R_1$  de type C qui interviendrait lors de la construction du contour parallèle à l'étape suivante. Il ne démontre pas que si ce point de rupture n'intervient pas, un deuxième point  $R_2$  issu de  $p_i$ , et situé plus loin que  $R_1$ , ne puisse intervenir. Si une telle situation devait se produire, nous devons stocker dès maintenant l'ensemble des points de rupture de type C engendré par  $p_i$  afin de ne pas recalculer un second point de rupture au cours des phases ultérieures, ce qui augmenterait encore la complexité. Tous les  $M$  points de rupture possibles trouvés à partir d'une bissectrice issue d'un sommet concave sont donc stockés dès maintenant dans l'ensemble  $S$ .

Le nombre d'opérations pour déterminer les éventuels  $k$  points de rupture de type C est de  $n * n_c$ , soit en  $O(n^2)$  si  $n_c$  est proche de  $n$ . Le nombre  $M$  de points de rupture de type C trouvés au total pour un sommet concave est en  $O(n)$ . Ceci conduit à effectuer  $n_c * n$  insertions dans  $S$  et conduit donc à une complexité dans le pire des cas de  $O(n^2 \log n)$ .



A la fin de cette initialisation, nous avons calculé les  $O(n)$  points de rupture de type B numérotés 1-1 en  $O(n)$ , et les  $k$  points en  $O(n^2)$ . Le nombre  $k$  de points de rupture de type C étant en  $O(n^2)$ , l'insertion ordonnée de l'ensemble des points de rupture de type B et C nécessite donc  $O(n^2 \log n)$  opérations.

#### IV.3.1.2 - Traitement de l'ensemble des points de rupture potentiels

A l'issue de la phase d'initialisation, le traitement consiste à extraire séquentiellement de  $S$  le point de rupture de distance minimum, à construire la ou les nouvelles bissectrices engendrée par ce point de rupture, et à remettre à jour l'ensemble  $S$ .

Conformément au lemme 8, le point de rupture  $R$  de distance minimale correspond au premier point de rupture rencontré durant la croissance.

Si le point  $R$  relatif aux arêtes  $e_{i-1}$ ,  $e_i$ ,  $e_{i+1}$  est de type B, cela suppose de calculer les intersections  $I_1$  et  $I_2$  entre la nouvelle bissectrice  $B(i-1, i+1)$  qui doit être créée et les deux bissectrices qui lui sont maintenant adjacentes sur  $P$  à savoir,  $B(m, i-1)$  et  $B(i+1, j)$ . Si un de ces deux points d'intersection est , il est inséré dans l'ensemble  $S$  (cf. fig. IV.39B2 et C2). Si l'arête  $e_i$  était concernée par un événement de type C dans  $S$ , ce dernier peut être supprimé de l'ensemble. Si une bissectrice induisant le point de rupture est issue d'un sommet concave, l'ensemble des éventuels points de ruptures de type C relatifs à cette bissectrice peuvent être supprimés de l'ensemble  $S$ .

Si  $R$  est de type C et concerne les arêtes  $e_i$ ,  $e_{i+1}$  et  $e_j$ , il faut créer les nouvelles bissectrices  $B(i, j)$  et  $B(j, i+1)$ , et pour chacune d'elles tester l'intersection avec ses deux nouvelles voisines dans la liste qui a été auparavant scindée en deux. Ainsi, au maximum, deux nouveaux points de rupture de type B numérotés 1-1 peuvent éventuellement être insérés dans  $S$ .

Ce processus se poursuit tant que  $S$  n'est pas vide. Remarquons que lors des mises à jour, un élément de  $S$  peut ne plus être valide à cause de l'intersection induite par une nouvelle bissectrice. Dans ce cas, il est simplement retiré de l'ensemble (cf. fig. IV.40C2).

La phase de traitement nécessite au plus  $O(n^2)$  opérations. A chaque étape, seule l'insertion d'un nouveau point de rupture dans  $S$  et la destruction d'un point de rupture devenu caduque est à considérer (ce qui peut être réalisé en  $\log n$ ), les autres opérations, calcul d'intersection et de distance, étant réalisées en temps constant. La complexité de cette seconde phase est donc aussi en  $O(n^2 \log n)$ .

Au total, cet algorithme a une complexité en  $O(n^2 \log n)$  dans un cas général, et en  $O(n \log n)$  dans le cas d'un polygone convexe.

L'espace occupé est en  $O(n)$  pour la liste de bissectrices construite durant le processus,  $O(n^2)$  pour le stockage dans  $S$  de l'ensemble des points de rupture de type B et C calculés durant la phase d'initialisation, soit une place mémoire totale en  $O(n^2)$ .

### IV.3.2 - Algorithme de construction par division et fusion pour un polygone sans trou

Le principe général de ce type d'algorithme en "divide and conquer" est de diviser de façon récursive l'ensemble initial des  $N$  données en deux sous-ensembles approximativement de taille  $N/2$ . Cette division s'arrête lorsque l'on arrive à un petit nombre de données qui permet d'appliquer une méthode simple de résolution. La fusion deux à deux de chacun de ces sous-ensembles permet, en remontant dans l'arbre récursif, de donner la solution générale du problème. La fusion est bien sûr la procédure la plus délicate de l'algorithme, et la complexité générale de celui-ci dépend en grande partie de la complexité de cette procédure de fusion.

#### IV.3.2.1 - Principe de l'algorithme de fusion de deux chaînes

La deuxième étape consiste à fusionner deux à deux les différentes chaînes suivant la figure ci-dessous :

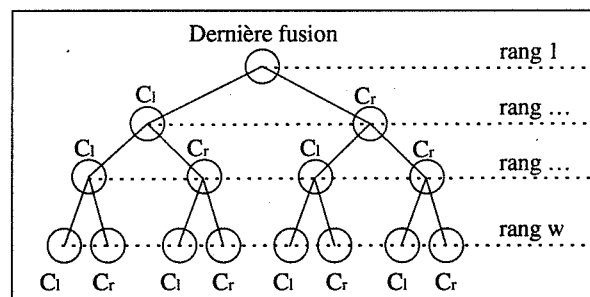


Figure IV.42 : Arbre de fusion d'un ensemble de  $2^w$  chaînes initiales.

Cette fusion s'opère sur deux chaînes gauche et droite consécutives sur  $P$ , nommées respectivement  $C_l$  et  $C_r$ , telles que  $C_l$  précède  $C_r$  dans le sens de parcours de  $P$ . Ces deux chaînes ont donc un point  $q_s$  en commun.

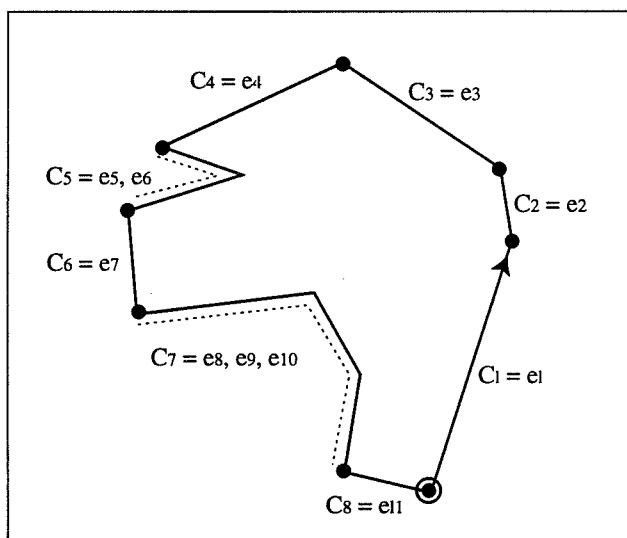
Le but de cette procédure est de rechercher la chaîne de fusion  $ML$ , composée uniquement par les bissectrices relatives à la fois à une arête de  $C_l$  et à une arête de  $C_r$ . La première bissectrice de  $ML$  est par voie de conséquence  $B(l, r)$ , bissectrice des arêtes  $e_l$  et  $e_r$ , qui sont respectivement la dernière et la première arête de  $C_l$  et de  $C_r$  dans le sens d'orientation de  $P$ . Cette première bissectrice est issue de  $q_s$ .

Si  $C_l$  et  $C_r$  ont un deuxième point en commun, la fusion s'opère sur les deux dernières chaînes de l'arbre de fusion, et le dernier élément de ML doit être la bissectrice entre la première et la dernière arête de  $C_l$  et  $C_r$ .

Chaque cellule  $V(i)$  possède une liste de bissectrices qui est parcourue du point extrémité vers le point origine de l'arête  $e_i$ , soit une orientation dans le sens CCW de la cellule par rapport à l'arête orientée. Ainsi, on peut trouver dans une cellule  $V(i)$  les bissectrices  $B(i, i+1)$ ,  $B(i, k)$ , ...,  $B(i, r)$ ,  $B(i, i-1)$ . Une bissectrice de deux arêtes  $e_i$  et  $e_j$ , appartient aux deux listes de bissectrices des cellules  $V(i)$  et  $V(j)$ . Elle sera respectivement notée  $B(i, j)$  et  $B(j, i)$  dans les cellules  $V(i)$  et  $V(j)$ .

Nous avons implémenté l'algorithme de façon itérative. Ainsi, la première étape de la construction du réseau bissecteur consiste à diviser la liste des arêtes d'un contour polygonal  $P$  en chaînes élémentaires qui devront ensuite être fusionnées deux à deux.

En observant que deux bissectrices issues de deux sommets concaves consécutifs ne peuvent pas s'intersecter, nous allons constituer un ensemble de chaînes initiales convexes et concaves. Ceci afin d'éviter de réaliser la fusion en  $n_c$  chaînes concaves et  $n_x$  chaînes convexes (cf. fig. IV.43).



**Figure IV.43 :** Décomposition initiale du polygone en chaînes convexes et concaves.

Une chaîne concave comporte des arêtes adjacentes de  $P$  où chaque point  $p_i$  entre  $e_{i-1}$  et  $e_i$  est un sommet concave. Ces chaînes sont limitées à leurs extrémités par deux sommets convexes. Comme deux bissectrices issues de deux sommets concaves consécutifs ne peuvent pas s'intersecter, les bissectrices issues des sommets des chaînes concaves sont calculées en même temps que la construction de la chaîne.

Une chaîne convexe est, au début de l'algorithme, une arête unique limitée par deux sommets convexes.

### • Procédure de fusion

Soit  $B$  la bissectrice de départ de la procédure de fusion. La première bissectrice prise en compte est donc  $B = B(l, r)$ , que nous insérons dans les listes de bissectrices de  $V(l)$  et de  $V(r)$ .

Nous devons ensuite trouver le point d'intersection entre  $B(l, r)$  et les bissectrices des cellules  $V(l)$  et  $V(r)$  des arêtes courantes  $e_l$  et  $e_r$ . Pour ce faire, nous parcourons les bissectrices de  $V(l)$  dans le sens CCW et celles de  $V(r)$  dans le sens CW, à partir de la bissectrice courante  $B(l, r)$ . Nous balayons ainsi respectivement les bissectrices suivantes de  $B(l, r)$  dans  $V(l)$ , et les bissectrices précédentes de  $B(r, l)$  dans  $V(r)$ , jusqu'à trouver effectivement un point d'intersection avec une bissectrice, ou jusqu'à arriver à la fin de la liste des bissectrices.

Supposons que nous ayons trouvé un point d'intersection avec les bissectrices de chacune des cellules (cf. fig. IV.44A). Soient  $I_l$  et  $I_r$  ces points d'intersection concernant  $B(l, r)$  et respectivement les bissectrices  $B(l, i)$  et  $B(r, j)$ . Supposons aussi, sans perte de généralité, que  $d(I_l, q_s) < d(I_r, q_s)$ . Dans ce cas, le point d'intersection à considérer est  $I_l$ . Nous venons de sortir de la cellule  $V(l)$  et nous sommes entrés dans la cellule  $V(i)$ . L'arête courante gauche est maintenant  $e_i$  et nous devons créer et insérer dans les deux listes de bissectrices de  $e_i$  et de  $e_r$  la nouvelle bissectrice  $B(i, r)$ . De par la construction de cette nouvelle bissectrice (de même direction que  $e_r$ ) la monotonie de la cellule est conservée.

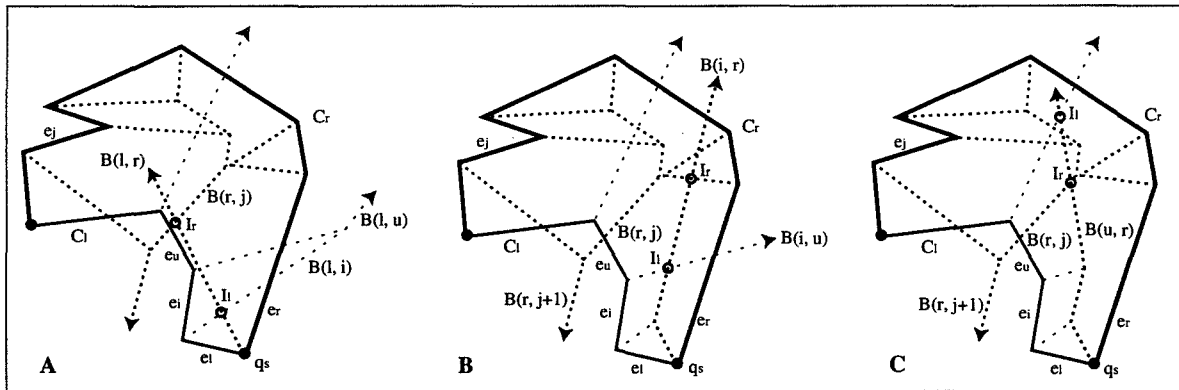


Figure IV.44 : Illustration de trois étapes de la procédure de fusion.

Dans une seconde étape, nous détruisons toutes les bissectrices de  $V(l)$  qui ont été testées et qui n'ont pas donné de point d'intersection (cf. bissectrice  $B(l, u)$  sur fig. IV.44B). Ces bissectrices, situées à droite de  $B(l, r)$ , sont aussi supprimées de la liste de la cellule relative à leur seconde arête.

A partir de la nouvelle bissectrice courante  $B = B(i, r)$  nous continuons la fusion en prenant en compte les bissectrices de  $V(i)$  et celles de  $V(r)$  situées respectivement après la bissectrice  $B(i, r)$  et avant la bissectrice  $B(r, i)$  sur  $V(i)$  et sur  $V(r)$ .

La fusion progresse ainsi jusqu'à ce qu'une nouvelle intersection soit détectée ou que la dernière bissectrice créée soit issue de la première et de la dernière arête de  $C_l$  et de  $C_r$  (cf. fig. IV.44C).

#### • Intersections entre bissectrices

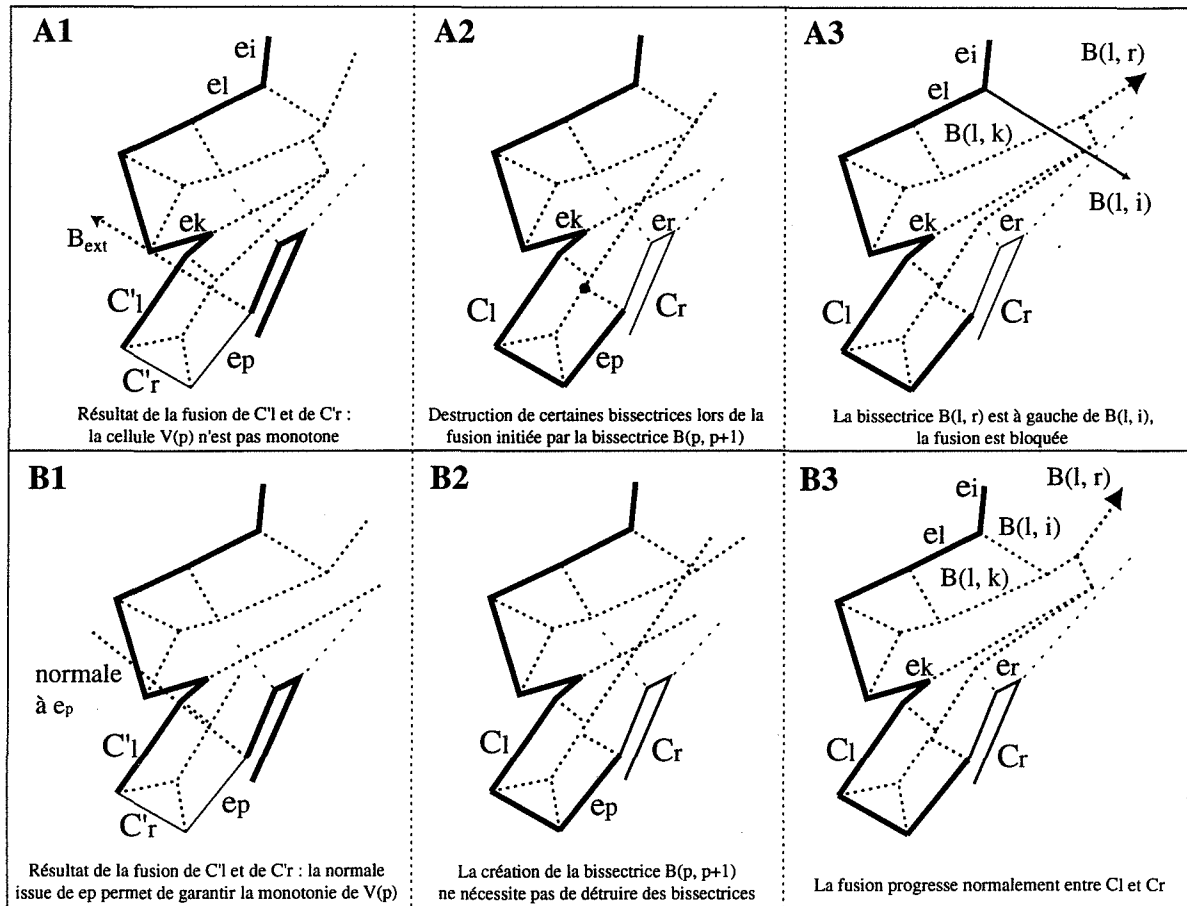
Intéressons-nous à la recherche des points d'intersection entre la bissectrice courante de la fusion  $B$  et une bissectrice  $B(l, i)$  de  $V(l)$ .

Trois situations peuvent se présenter :

1 • Si  $B(l, i)$  est entièrement à droite de  $B$ , on passe à la bissectrice suivante de  $B(l, i)$  dans le sens de parcours de la cellule. Si  $B$  intersecte effectivement une des bissectrices suivantes de  $B(l, i)$ ,  $B(l, i)$  devra être détruite.

2 • Si  $B(l, i)$  intersecte  $B$  au point  $I_l$ , la distance  $d(I_l, q_s)$  est calculée, et on arrête la recherche des intersections avec les bissectrices de cette cellule.

3 • Si  $B$  est entièrement à gauche de  $B(l, i)$  (cf. fig. IV.45.A3), alors la monotonie de la cellule  $V(l)$  n'est plus conservée et le réseau bissecteur partiel, construit à l'étape précédente de fusion, n'est pas correct. Ce cas de figure peut se produire si l'on ne tient pas compte de la bissectrice  $B_{ext}$  issue du point origine (respectivement du point extrémité) de la première arête de  $C_l$  (respectivement de la dernière arête  $e_p$  de  $C_r$ ) (cf. fig. IV.45.A1). Dans ce cas, plusieurs bissectrices peuvent être construites alors qu'elles ne sont pas pertinentes par rapport à leur arête.



**Figure IV.45 :** Importance de conserver la monotonie des cellules lors de la construction partielle du réseau bissecteur de deux chaînes (figure B). La procédure de fusion peut être mise en échec dans le cas contraire (figure A).

Le problème est que nous ne connaissons pas encore  $B_{ext}$  puisque la fusion initiée par cette bissectrice au niveau du point origine ou extrémité considéré n'a pas encore été réalisée. Toutefois, de par la partition initiale des chaînes en concave et en convexe, nous sommes certains que le point commun à deux chaînes est un sommet convexe.

Nous choisissons donc d'approximer cette bissectrice par la normale à l'arête issue du point origine ou extrémité considéré (cf. fig. IV.45.B1). Si nous considérons la dernière arête  $e_p$  de la chaîne droite  $C'r$ , nous sommes certains que tous les points d'intersection impliquant l'arête  $e_p$  et situés à droite de la normale à  $e_p$  issue de  $p_{p+1}$  ne génèrent pas des bissectrices valides.

Ce critère nous permet lors de la recherche des intersections, décrite au point 2 ci-dessus, d'éliminer certaines connexions non valides entre bissectrices et de garantir l'obtention d'un réseau bissecteur partiel correct tout au long de la fusion (cf. fig. IV.45.B1).

### IV.3.2.2 - Algorithme

La première étape de l'algorithme est la division du contour initial en chaînes convexes et concaves (cf. Algo IV.1 et IV.2).

**Algo IV.1 : Recherche du réseau bissecteur d'un polygone sans trou**

***ConstruireRéseau ( P )***

- En entrée : Un polygone P
- En sortie : le polygone P muni de son réseau bissecteur

```
Chaîne <- PartitionDesChaînes ( P )
P <- FusionnerLesChaînes ( Chaîne )
Retourner P
```

**Algo IV.2 : Partition d'un contour P en chaînes convexes et concaves**

***PartitionDesChaînes ( P )***

- En entrée : Un contour P à partitionner en chaînes concaves et convexes
- En sortie : Une liste de chaînes convexes et concaves

```
TêteChaîne <- Création de la tête de la liste chaînée
pDeb <- premier sommet convexe de P
ei <- eDeb <- arête dont le point origine est pDeb
Répéter
    Chaîne <- Création et chaînage d'une nouvelle chaîne
    Ajouter ei à Chaîne
    ei <- ei+1
    Tant que ( pi est concave ET que ei ≠ eDeb )
        B(i-1, i) <- CréerBis ( ei-1, ei, NULL )
        Ajouter ei à Chaîne
        ei <- ei+1
    Fin Tant que
Jusqu'à ( ei == eDeb )
Retourner TêteChaîne
```

Une fois que toutes les chaînes de P ont été individualisées, on passe à la deuxième étape de l'algorithme, la fusion deux à deux des chaînes en remontant l'arbre de fusion (cf. Algo IV.3).

La fusion s'opère entre deux chaînes consécutives, une chaîne gauche et une chaîne droite, chacune munie de son réseau bissecteur. Le but de la fusion est de trouver une suite de bissectrices, chacune issue d'une arête de la chaîne gauche et d'une arête de la chaîne droite, qui relie correctement les deux réseaux bissecteurs gauche et droit (cf. Algo IV.4).

**Algo IV.3 : Fusion des chaînes convexes et concaves d'un contour P*****FusionnerLesChaînes ( TêteChaîne )***

- En entrée : L'ensemble des chaînes convexes et concaves
- En sortie : TêteChaîne munie de son réseau bissecteur

**Tant que** ( TêteChaîne contient plus d'une chaîne )

Chaîne <- première chaîne de TêteChaîne

**Tant que** ( La chaîne suivante de Chaîne n'est pas nulle )

Chaîne <- *Fusionner* (fin de Chaîne, début de la chaîne suivante de Chaîne, NULL)

Concaténation de Chaîne avec la chaîne suivante de Chaîne

Chaînage de Chaîne avec la chaîne suivante de la chaîne suivante de Chaîne

**Fin Tant que**

**Fin Tant que**

Retourner TêteChaîne

**Algo IV.4 : Fusion de deux chaînes gauche et droite*****Fusionner ( eg, ed, Bdeb )***

- En entrée : la fin de la chaîne gauche, le début de la chaîne droite et la bissectrice d'arrêt
- Construction des bissectrices de chaque cellule

**Si** ( B<sub>deb</sub> ≠ NULL )

P <- sommet commun à e<sub>g</sub> et e<sub>d</sub>

B(g, d) <- B <- *CréerBis* ( e<sub>g</sub>, e<sub>d</sub>, P )

**Sinon**

B(g, d) <- B <- *CréerBis* ( e<sub>g</sub>, e<sub>d</sub>, NULL )

P <- point origine de B

**Fin de si**

**Répéter**

PointG <- NULL; TabBg <- ∅; FINlg <- faux

B(g, g<sub>o</sub>) <- bissectrice suivante de B sur e<sub>g</sub> dans le sens CW

**Tant que** ( B(g, g<sub>o</sub>) n'est pas nulle **ET** que FINlg est faux )

**Si** ( *CohérenceBis* ( B, B(g, g<sub>o</sub>), PointG ) est égale à 1 )

FINlg <- vrai

**Sinon**

**Si** ( B(g, g<sub>o</sub>) est une bissectrice interne )

Ajouter B(g, g<sub>o</sub>) à TabBg

B(g, g<sub>o</sub>) <- bissectrice suivante de B(g, g<sub>o</sub>) dans le sens CW

**Sinon**

FINlg <- vrai

**Fin de si**

**Fin de si**

**Fin Tant que**

PointD <- NULL; FINld <- faux; TabDd <- ∅

B(d, d<sub>o</sub>) <- bissectrice suivante de B sur e<sub>d</sub> dans le sens CCW

**Tant que** ( B(d, d<sub>o</sub>) n'est pas nulle **ET** que FINld est faux )

**Si** ( *CohérenceBis* ( B, B(d, d<sub>o</sub>), PointD ) est égale à 1 )

FINld <- vrai

**Sinon**

**Si** ( B(d, d<sub>o</sub>) est une bissectrice interne )



```

        Ajouter B(d, do) à TabBd
        B(d, do) <- bissectrice suivante de B(d, do) dans le sens CCW
    Sinon
        FINId <- vrai
    Fin de si
Fin de si
Fin Tant que
Si ( PointD ≠ NULL OU PointG ≠ NULL )
    Si ( Distance ( P, PointG ) est inférieure à Distance ( P, PointD ) )
        Détruire les bissectrices de TabBg
        Détruire les bissectrices entièrement situées à gauche de la normale
            à ed passant par PointG
        B(go, d) <- B <- CréerBis ( ego, ed, PointG )
        eg <- ego et P <- PointG
    Sinon
        Détruire les bissectrices de TabBd
        Détruire les bissectrices entièrement situées à droite de la normale
            à eg passant par PointD
        B(g, do) <- B <- CréerBis ( eg, edo, PointD )
        ed <- edo et P <- PointD
    Fin de si
Fin de si
Jusqu'à ( ( ed->suiv == eg ) OU ( PointD == NULL ET PointG == NULL ) )

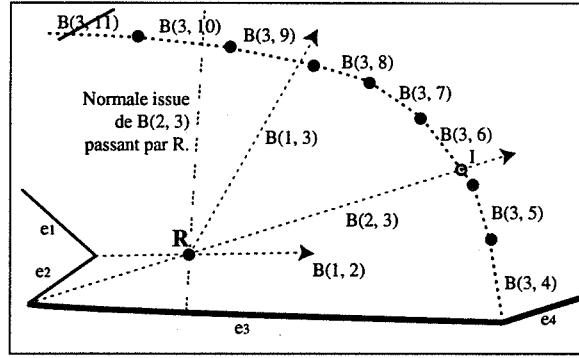
```

Nous définissons la fonction *CréerBis*( $e_i, e_j, Pt$ ) qui renvoie l'équation de la bissectrice  $B(i, j)$  orientée, et les points origine et extrémité d'une portion de celle-ci. Le point origine est soit  $Pt$ , soit l'intersection entre  $e_i$  et  $e_j$  si  $Pt$  a une valeur nulle. Dans ce cas, le point extrémité est placé à l'infini. *CréerBis*( $e_i, e_j, Pt$ ) renvoie une valeur nulle si la bissectrice entre  $e_i$  et  $e_j$  n'est pas définie.

La fonction *CohérenceBis* permet de tester si en fonction de leur position relative deux bissectrices peuvent s'intersecter sans violer les règles de monotonie des cellules, et si oui, elle calcule effectivement le point d'intersection de ces deux bissectrices.

#### IV.3.2.3 - Complexité de l'algorithme

Nous ne pouvons pas détruire toutes les bissectrices d'une cellule qui n'ont pas donné de point d'intersection si cette cellule n'est pas concernée par le point d'intersection définitif. En effet, certaines de ces bissectrices peuvent être intersectées dans une étape ultérieure (cf. fig. IV.46). Seules les bissectrices situées à droite (respectivement à gauche) de la normale passant par le dernier point d'intersection trouvé et issue de l'arête gauche (respectivement droite) peuvent être éliminées.



**Figure IV.46 :** Toutes les bissectrices testées lors de la recherche du point I ne peuvent pas être détruites car elles peuvent engendrer un point d'intersection lors de la prochaine étape. Sur cet exemple seule B(3, 11) peut être éliminée puisqu'elle est entièrement située à gauche de la normale à e3 passant par R.

Ces bissectrices peuvent donc être testées plus d'une fois, ce qui peut rendre notre procédure de fusion supra-linéaire. Si  $n/2$  est le nombre d'arêtes de  $C_l$  et de  $C_r$ , une cellule peut comporter au maximum  $O(n/2)$  bissectrices. Pour que la fusion ait une complexité en  $O(n^2)$ , toutes les bissectrices de cette cellule doivent être testées avec les  $n/2$  bissectrices de fusion sans jamais induire de points d'intersection.

Bien que ce cas soit irréaliste, nous avons néanmoins dans le pire des cas une fusion de complexité quadratique.

Si  $n$  représente le nombre total de segments du polygone, tel que  $n$  soit une puissance de deux ( $n=2^w$ ), la complexité générale,  $T(n)$  de l'algorithme est donnée par :

$$T(n) \leq 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \alpha n^2$$

En développant l'équation de récurrence on obtient :

$$\bullet T(n) \leq 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \alpha n^2$$

$$\bullet T(n) \leq 2\left[2T\left(\frac{n}{4}\right) + \alpha\left(\frac{n}{2}\right)^2\right] + \alpha n^2$$

$$\Rightarrow T(n) \leq 2^2 T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 2\alpha\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \alpha n^2$$

$$\bullet T(n) \leq 2^2\left[2T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \alpha\left(\frac{n}{2^2}\right)^2\right] + 2\alpha\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \alpha n^2$$

$$\Rightarrow T(n) \leq 2^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 2^2 \alpha\left(\frac{n}{2^2}\right)^2 + 2\alpha\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \alpha n^2$$

ce qui donne au rang  $k$ , avec  $1 < k < w$  :

$$\bullet T(n) \leq 2^k T\left(\frac{n}{2^k}\right) + \alpha n^2 \left[ \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-2}} + \dots + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^0} \right]$$

soit au rang  $w$  :

$$\bullet T(n) \leq 2^w T\left(\frac{n}{2^w}\right) + \alpha n^2 \left[ \frac{1}{2^{w-1}} + \frac{1}{2^{w-2}} + \dots + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^0} \right]$$

avec  $w = \log_2 n$

$$\bullet T(n) \leq \underbrace{nT\left(\frac{n}{n}\right)}_{nT(1)} + \alpha n^2 \underbrace{\left[ \frac{1}{2^{w-1}} + \frac{1}{2^{w-2}} + \dots + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^0} \right]}_{\leq 2}$$

soit une complexité générale :  $\bullet T(n) \leq nT(1) + 2\alpha n^2 = n + 2\alpha n^2 \Rightarrow O(n^2)$

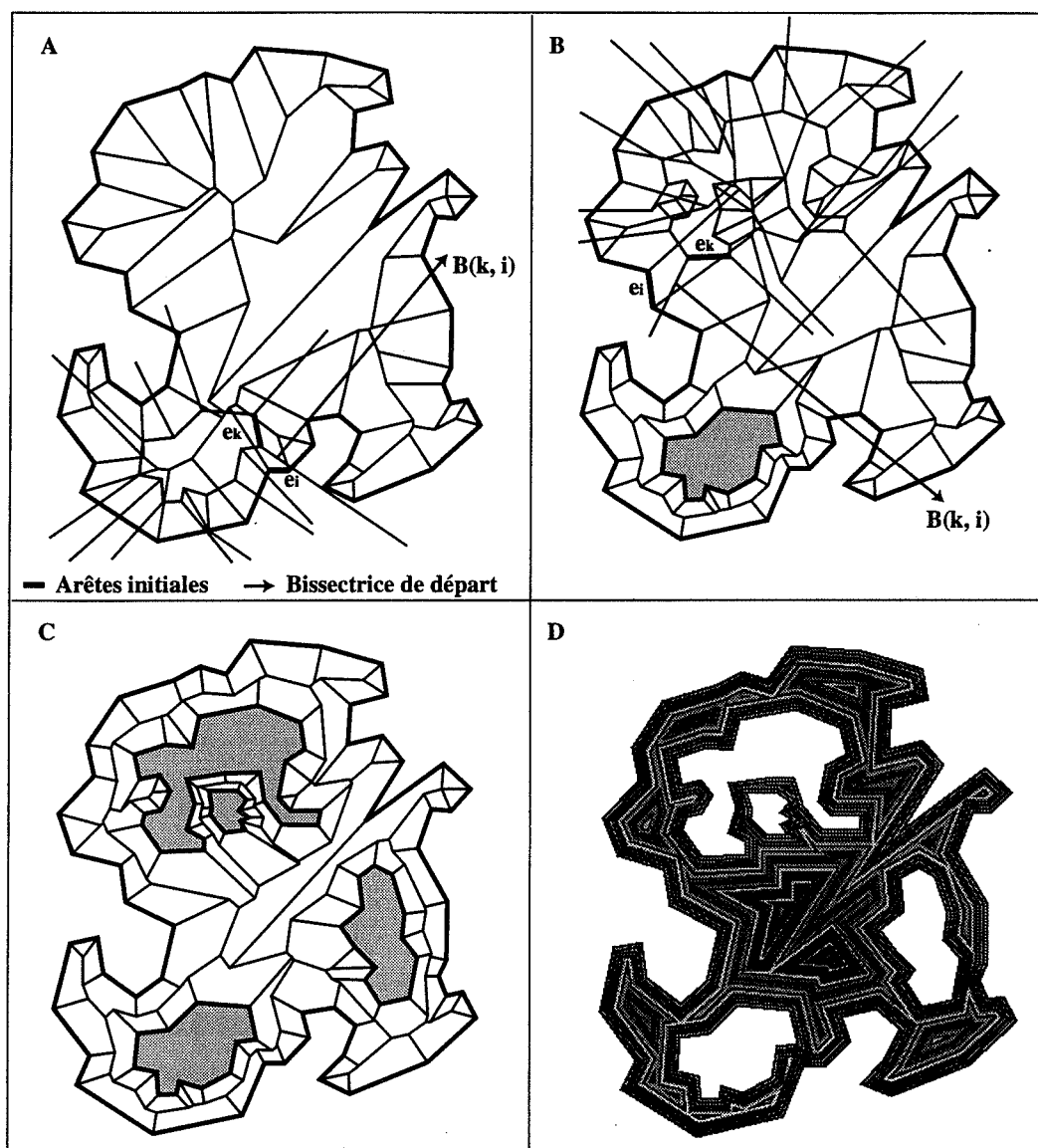
Malgré cette complexité quadratique, tous les tests que nous avons effectués sur machine (avec environ 1500 arêtes initiales) montrent un nombre de tests toujours inférieur à  $(n \log n)$ . En effet, tout dépend du nombre de bissectrices de la chaîne de fusion. Plus ce nombre est proche de  $n$ , et moins les cellules sont complexes, ce qui conduit à un nombre linéaire de tests à effectuer. Si le nombre de bissectrices de la chaîne de fusion est au contraire très faible, cela signifie que l'on traite une forme complexe où seules quelques bissectrices des réseaux bissecteurs gauche et droit sont libres. Dans ce cas, les tests ne concernent que peu de bissectrices.

Concernant l'espace occupé par les structures de données, il est en  $O(n)$  durant tout le déroulement de l'algorithme. En effet, à chaque fusion, seuls sont stockées au niveau de chaque sommet les bissectrices participant au réseau déjà construit et relatives à une arête considérée. Ainsi chaque arête possède uniquement la liste ordonnée de toutes les bissectrices composant sa cellule. Le nombre total de bissectrices étant bien évidemment linéaire.

#### IV.3.3 - Algorithme de construction du réseau bissecteur pour un polygone avec trous

L'algorithme qui nous permet de générer le réseau bissecteur d'un polygone troué peut être schématisé ainsi :

- 1 - Construire le réseau bissecteur interne du polygone externe P.
- 2 - Pour chaque contour intérieur HH, et ce dans n'importe quel ordre :
  - a - Construire le réseau bissecteur externe du contour HH.
  - b - Déterminer une bissectrice entre une arête  $e_k$  du trou et une arête  $e_i$  relative au réseau bissecteur de P déjà construit.
  - c - Fusionner les deux réseaux en partant de la bissectrice  $B(k, i)$ , ce qui donne le nouveau réseau bissecteur interne de P avec les trous traités.



**Figure IV.47 :** Les figures A et B illustrent le choix des arêtes initiales pour la fusion d'un nouveau trou. La figure C montre le réseau bissecteur final de la forme, et on peut voir 31 contours parallèles tracés à partir du réseau bissecteur sur la figure D.

Les stades 1 et 2a utilisent directement la procédure décrite dans la section précédente. Nous devons remarquer qu'en fonction de l'orientation du contour, le réseau est soit interne (sens CCW) soit externe (sens CW).

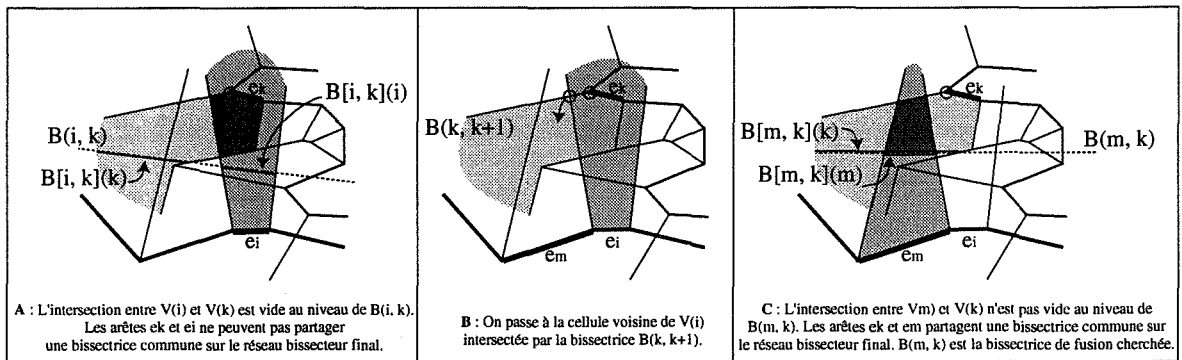
La phase 2b est la phase la plus délicate. Il s'agit de déterminer une bissectrice de départ qui sera présente dans le réseau bissecteur final.

Pour cela, nous déterminons un sommet concave  $p_{k+1}$  du trou HH dont la bissectrice n'est pas composée avec d'autres bissectrices du trou. Ceci nous assure que les arêtes parallèles  $e_k$  et  $e_{k+1}$  sont toutes deux présentes sur un contour parallèle  $G(HH, h)$ , et ce, quelle que soit la distance  $h$ . Notons qu'il est toujours possible de déterminer une bissectrice libre issue d'un sommet concave sur un réseau bissecteur externe.

Comme  $B(k, k+1)$  ne peut pas être combinée avec une autre bissectrice du trou et qu'elle ne peut pas rester libre à la fin de la procédure, elle doit nécessairement être combinée avec deux bissectrices  $B(k, j)$  et  $B(j, k+1)$ , et provoquer ainsi un point de rupture de type B ou C avec l'arête  $e_j$ . Nous devons donc déterminer l'arête  $e_j$  qui partagera une bissectrice avec l'arête  $e_k$  ou  $e_{k+1}$  dans le réseau bissecteur final.

Comme  $p_{k+1}$  est par définition à l'intérieur de  $P$ , il appartient forcément à au moins une cellule  $V(i)$  du réseau bissecteur de  $P$ .

Si la bissectrice  $B(k, k+1)$  induit un point de rupture  $R$  de type C avec  $e_i$  (cf. lemme 6 et fig. IV.27A), alors, étant donné que  $p_{k+1}$  appartient à la cellule  $V(i)$ , le lemme 7 nous garantit que  $p_{k+1}$  ne peut pas induire un autre point de rupture avec une autre arête. Le point  $R$  est donc un point de rupture valide et nous permet de définir une bissectrice initiale de fusion qui est soit  $B(k, i)$ , soit la bissectrice  $B(i, k+1)$  (cf. fig. IV.47A).



**Figure IV.48 :** Procédure de test permettant de savoir si une arête d'un trou peut partager une bissectrice commune avec une arête du réseau bissecteur déjà construit.

Si en revanche, la bissectrice  $B(k, k+1)$  n'induit pas de point de rupture de type C avec l'arête  $e_i$ , alors elle peut induire un point de rupture  $R$  de type B. Nous notons par  $B[k, i]_{(i)}$  la suite de segments portés par  $B(k, i)$  et qui intersectent la cellule  $V(i)$ . De manière similaire on peut définir  $B[k, i]_{(k)}$ ,  $B[i, k+1]_{(i)}$  et  $B[i, k+1]_{(k+1)}$  (cf. fig. VI.48A). Chaque segment est en fait un intervalle limité par deux points d'intersection avec les arêtes de  $V(i)$ ,  $V(k)$  ou  $V(k+1)$ .

Pour que  $R$  soit effectivement un point de rupture entre l'arête  $e_i$  et l'arête  $e_k$  (ou entre l'arête  $e_i$  et l'arête  $e_{k+1}$ ) il est nécessaire que l'intersection entre  $B[k, i]_{(i)}$  et  $B[k, i]_{(k)}$  ne soit pas vide (ou que l'intersection entre  $B[i, k+1]_{(i)}$  et  $B[i, k+1]_{(k+1)}$  ne soit pas vide). En d'autres termes, il est nécessaire que l'intersection des deux cellules  $V(i)$  et  $V(k)$  (ou  $V(k+1)$ ) ne soit pas vide le long de  $B(k, i)$  (ou de  $B(i, k+1)$ ). En effet, si tel est le cas, il est impossible que les deux arêtes partagent une bissectrice dans le réseau final puisque le franchissement d'une bissectrice de  $V(i)$  ou de  $V(k)$  implique de ne plus être dans aucune de ces deux cellules.

S'il apparaît qu'à la fin du test le point R est bien un point de rupture valide de type B, alors l'arête  $e_i$  permet de définir la bissectrice initiale de fusion  $B(k, i)$  (cf. fig. IV.47B).

Si malgré tout, R n'est ni un point de rupture de type C, ni un point de rupture de type B, il est nécessaire de se déplacer dans une cellule voisine de  $V(i)$  afin de déterminer l'arête recherchée. La nouvelle cellule  $V(m)$  qui va être étudiée est la première cellule voisine de  $V(i)$  intersectée par la bissectrice  $B(k, k+1)$  (cf. fig IV.48B).

Les mêmes tests sont à nouveau effectués vis-à-vis de l'arête  $e_m$ .

La procédure continue ainsi jusqu'à ce qu'un des deux tests sur les points de rupture soit positif. L'arête  $e_j$  concernée est alors l'arête cherchée (cf. fig IV.48C). Notons que ce déplacement de cellule en cellule ne se fait qu'autour des cellules voisines de l'arête  $e_i$  testée. Le nombre de cellules qui peuvent être potentiellement intersectées par  $B(k, k+1)$  dans le pire des cas est en  $O(n)$ , donc le nombre de tests peut lui aussi être en  $O(n)$ . Ceci est bien évidemment largement minoré dans la pratique par le fait que, seules, les cellules "proches" de la première cellule testée peuvent induire un point de rupture avec la bissectrice  $B(k, k+1)$ .

La complexité de la recherche d'une bissectrice initiale de fusion est donc en  $O(n)$ .

Une fois que la phase 2b est réalisée et qu'une bissectrice initiale de fusion  $B(k, i)$  est déterminée, nous utilisons à nouveau la procédure décrite en section 3.1 en partant de la bissectrice interne  $B(k, i)$ . La fusion s'effectue tant que cette bissectrice de départ n'est pas à nouveau rencontrée sur la chaîne de fusion. Le test d'arrêt est donc modifié.

Cette procédure peut s'appliquer sur un nombre quelconque de trous, chacun étant inséré séquentiellement (cf. fig. IV.47C).

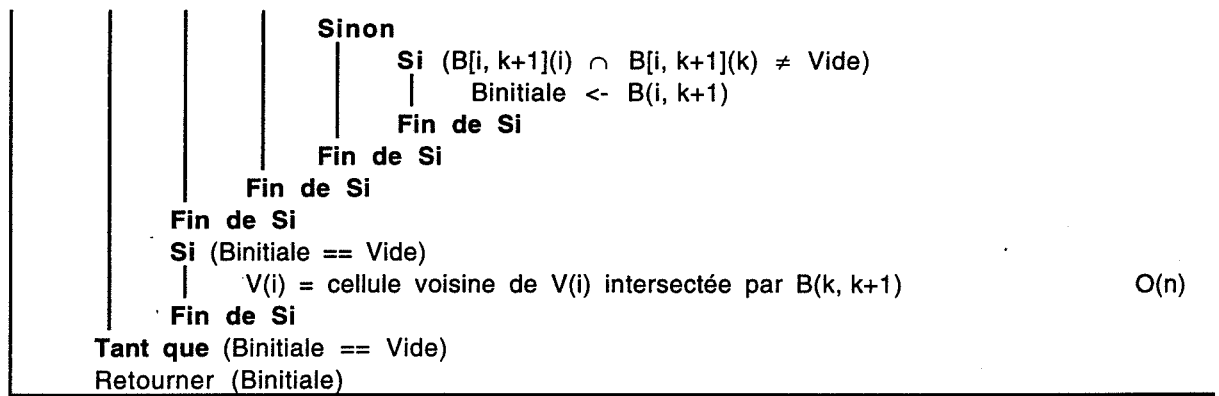
#### • Schématisation de l'algorithme

**Algo IV.5 : Localisation de la bissectrice initiale lors de la fusion d'un trou HH**

***ChercherBisInit ( P, HH )***

- En entrée : Le réseau bissecteur interne de P et le réseau bissecteur externe du trou
- En sortie : La bissectrice initiale de fusion entre P et HH

Chercher une bissectrice libre $B(k, k+1)$ issue d'un sommet concave $p_{k+1}$ de HH.	$O(m)$
$V(i) \leftarrow$ Localiser la cellule du réseau bissecteur de P contenant $p_{k+1}$	$O(n)$
Binitiale $\leftarrow$ Vide	
<b>Faire</b>	
<b>Si</b> ( $p_{k+1}$ est un point de rupture de type C)	$O(1)$
Binitiale $\leftarrow B(k, i)$	
<b>Sinon</b>	
<b>Si</b> ( $p_{k+1}$ est un point de rupture de type B)	$O(1)$
<b>Si</b> ( $B[k, i](i) \cap B[k, i](k) \neq \text{Vide}$ )	
Binitiale $\leftarrow B(k, i)$	



#### • Analyse de la complexité

Soit  $n$  et  $m$  le nombre respectif d'arêtes du réseau bissecteur déjà construit et celui du trou à fusionner. Comme la phase 2b se déroule en  $O(n)$ , la complexité de cet algorithme est celle de la fusion plus celle des phases 1 et 2a c'est-à-dire  $O(n^2 + m^2 + (n+m)^2)$ .

Si  $m$  a un ordre de grandeur inférieur ou équivalent à celui de  $n$ , la procédure d'ajout d'un trou à une complexité en  $O(6n^2)$  soit  $O(n^2)$ .

Pour les mêmes raisons que celles évoquées au paragraphe IV.3.2.3 la complexité pratique est bornée par  $O(n)$ . En effet, lors de la fusion les réseaux bissecteurs gauche et droit, respectivement relatifs au trou et au contour externe, sont complètement construits, et toutes les bissectrices du nouveau réseau sont créées séquentiellement dans un temps pratiquement linéaire.

### IV.3.4 - Algorithme de construction du réseau bissecteur externe de contours polygonaux.

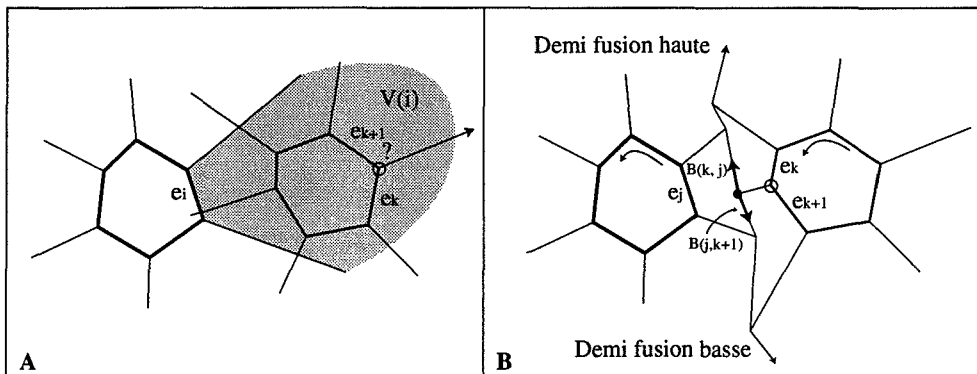
L'algorithme permettant de construire le réseau bissecteur externe d'une forme polygonale comportant plusieurs contours est sensiblement identique à celui de la construction de formes avec trous.

Les seules différences consistent dans le choix du sommet du contour à fusionner et dans le test d'arrêt de la fusion.

#### • Choix d'un sommet de départ :

Il faut pouvoir déterminer un sommet concave muni d'une bissectrice libre et dont on est sûr qu'il pourra induire une bissectrice avec le réseau bissecteur de  $P$  dans le réseau bissecteur final. Or, la détermination d'un tel sommet n'est pas aussi simple que dans l'algorithme

présenté ci-dessus puisqu'une bissectrice issue d'un sommet concave peut ne pas induire une bissectrice commune avec les arêtes d'un autre contour (cf. fig. IV.49A). D'autre part, la cellule  $V(i)$  pouvant être non bornée, il se peut qu'il n'existe pas d'intersection entre la bissectrice  $B(k, k+1)$  et les bissectrices de la cellule  $V(i)$ . Ceci nous obligerait à concevoir une procédure recherchant de manière explicite un sommet permettant une vraie connexion. Il n'est pas certain que cette procédure puisse être appliquée de façon simple en un temps linéaire.



**Figure IV.49 :** Difficulté de choisir un sommet concave initial (figure A), et possibilité d'effectuer deux "demi-fusions" lors de la construction d'un réseau bissecteur externe (figure B).

- Test d'arrêt de la fusion :

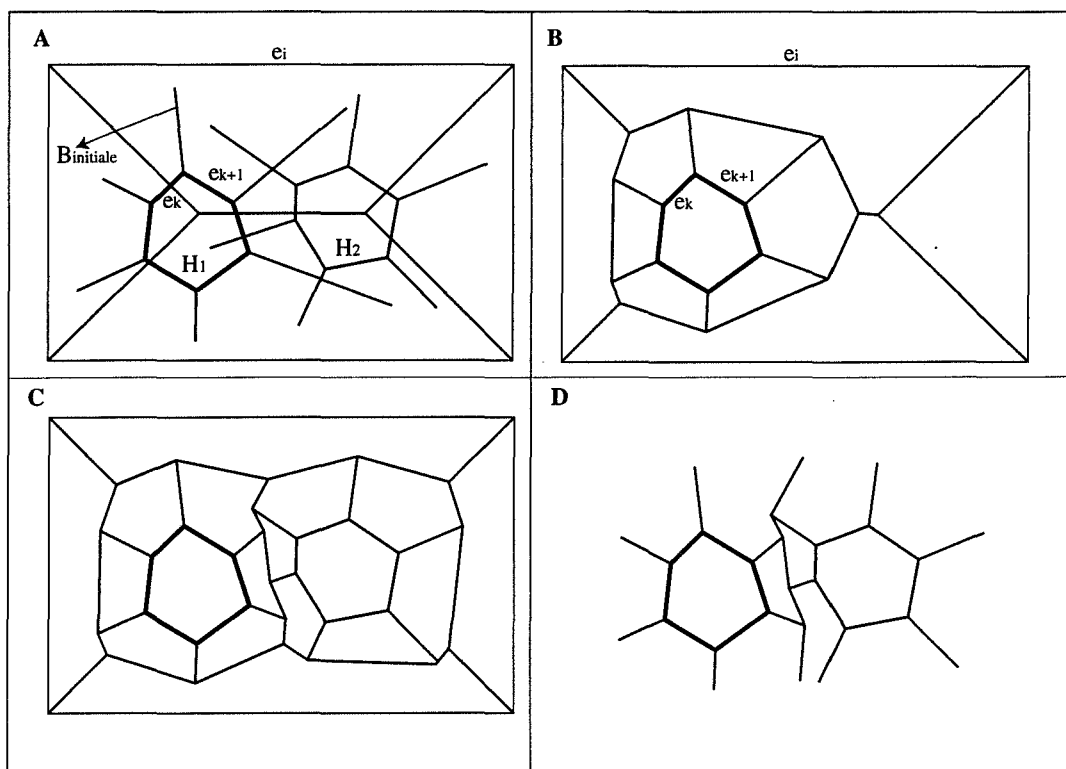
Si nous avons réussi à déterminer un sommet concave correct, comme dans ce cas le réseau bissecteur final comporte des cellules non bornées, la fusion initiée par une bissectrice de départ  $B(k, j)$  peut ne pas revenir à cette même bissectrice, mais être stoppée par faute d'intersection avec d'autres bissectrices. Dans ce cas, il faudrait relancer la fusion dans l'autre sens en utilisant la bissectrice  $B(j, k+1)$  (cf. fig. IV.49B).

La complexité de la fusion reste toutefois identique puisque les bissectrices testées durant la première demi-fusion ne le seront pas durant la seconde demi-fusion.

- Simplification de la procédure :

Quoi qu'il en soit, nous préférons contourner le problème en construisant le réseau bissecteur interne d'une forme trouée dont le contour externe est un rectangle placé à l'infini. Après avoir orienté l'ensemble des contours de manière inverse, nous appliquons à chaque contour interne la même procédure que pour un polygone avec trous (cf. fig. IV.50A et IV.50B).





**Figure IV.50 :** Simplification de la procédure de construction d'un réseau bissecteur externe par ajout d'un contour externe situé à l'infini.

(Pour les besoins de l'illustration le rectangle choisi est trop petit.  
Ainsi, il ne permet pas de déterminer le réseau bissecteur complet.)

Une fois le réseau bissecteur final obtenu (cf. fig. IV.50C), il suffit de détruire les bissectrices relatives aux arêtes du contour rectangulaire externe et d'orienter positivement l'ensemble des contours (cf. fig. IV.50D).

La complexité générale de cet algorithme reste identique à celle de la construction d'un polygone avec trous.



## **- CHAPITRE V -**

# **Problèmes de mise en correspondance**

Comme le soulignent très justement Sloan et al. [SLHR 81], la mise en correspondance de deux sections consécutives est une étape cruciale dans le processus de reconstruction 3D. En effet, le résultat de la reconstruction dépendra en grande partie de cette étape.

Nous avons vu dans le chapitre II que hormis quelques rares exceptions, en médecine notamment, les sections étaient souvent relativement distantes l'une de l'autre et que la plupart du temps la forme et l'orientation des objets pouvaient changer de manière importante entre deux niveaux consécutifs. Comme il est souvent exclu de réaliser physiquement de nouvelles coupes, le processus de reconstruction 3D doit pouvoir répondre seul à ce problème délicat.

Nous passons en revue dans le premier paragraphe les différents problèmes que nous avons pu rencontrer, en particulier en géologie, et qui se cachent sous le terme de mise en correspondance. La suite du chapitre expose les solutions que nous avons mises en œuvre, ainsi que des pistes de réflexion concernant les données que notre méthode ne permet pas de traiter "convenablement"<sup>1</sup>.

### **V.1 - Caractérisation du type des données. Choix d'une stratégie de mise en correspondance.**

Toutes les méthodes de reconstruction 3D qui traitent de manière globale et automatique les variations de topologie et de morphologie associent de manière étroite la mise en correspondance des contours de deux coupes consécutives avec celle des points de ces contours. C'est le cas des méthodes proposées par Yoshikazu [YOSH 92], Montanvert et al. [MOUS 93], Boissonnat et Geiger [BOGE 92], [GEIG 93] et de celle que nous proposons.

Dans ces approches une seule phase permet de répondre à la double question :

- Quels sont les contours qui doivent être reliés ?
- Quels points doit-on apparier parmi les points appartenant à X contours ?

---

<sup>1</sup> Bien que notre méthode fonctionne sur tous les types de données, elle pourra dans certains cas ne pas fournir le résultat attendu par l'opérateur.

La première question correspond à la **mise en correspondance des contours**, la seconde à l'**appariement des points** des contours préalablement mis en correspondance.

Les méthodes que nous venons de citer permettent, en répondant d'abord à la seconde question, de résoudre de manière implicite la première. Si, après projection de deux sections, deux points appartenant à deux sections voisines sont dans la même zone d'influence (zones différences, aires de recouvrement, proximité des sommets de Voronoï, ...) alors, les points sont appariés et les contours supportant ces deux points doivent être reliés. Ce parallèle entre point et contour fait la force de ces méthodes et leur permet de gérer de manière simple et directe toutes les différences de topologie.

Afin que la reconstruction soit correcte, toutes ces méthodes supposent que les formes des différentes sections aient été au préalable convenablement ajustées. La question qui vient alors à l'esprit est : est-il toujours possible d'ajuster "convenablement" deux formes ?

Nous verrons que tout dépend des formes et de la connaissance dont on dispose.

## **V.1.1 - Caractérisation des formes**

### **V.1.1.1- Formes dont l'ajustement est possible.**

Dans le cadre des méthodes que nous venons d'évoquer, l'ajustement de deux formes consécutives est une démarche globale qui consiste à "déformer" les contours d'une des sections par une série d'opérateurs afin de les faire correspondre au mieux aux contours de la seconde section. Le but recherché est par exemple de diminuer au maximum la surface des aires différences des deux contours. Les opérations les plus simples à utiliser sont les translations, les rotations et les dimensionnements.

C'est en fait le problème inverse de la création de surfaces génératives, où l'on se donne une fonction qui permet de déformer un contour initial. Dans notre cas, il faut retrouver la fonction qui permette le passage d'une section à l'autre.

Ces techniques d'ajustement peuvent s'appliquer quand :

- les formes et la topologie des deux sections consécutives sont très différentes,
- le nombre de points dans chaque section est élevé (dans ce cas une mise en correspondance manuelle est laborieuse...),
- les contours sont relativement "trapus", afin d'éviter les dégénérescences illustrées dans le paragraphe V.1.1.2,
- les informations sur la topologie de l'objet sont peu nombreuses.

C'est sans doute sur les données qui possèdent au moins une de ces caractéristiques que la méthode de reconstruction que nous proposons donne un résultat supérieur à celui d'autres types de méthodes.

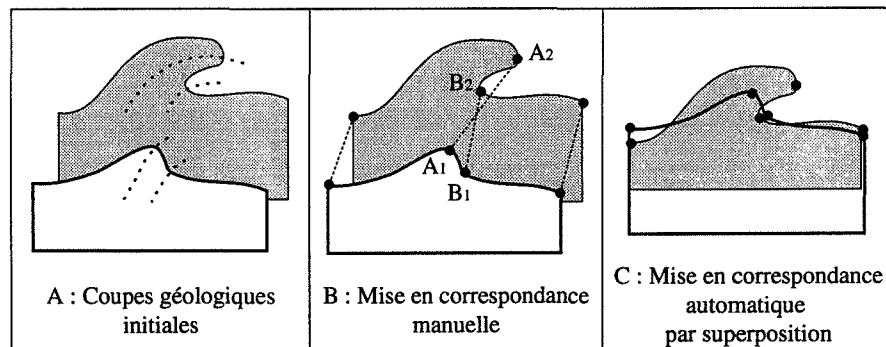
La recherche d'un ajustement "optimal" peut être réalisée soit directement par l'utilisateur, soit de manière automatique en s'aidant par exemple de la description des deux contours par leur squelette interne. Les méthodes automatiques peuvent alors faire appel aux techniques d'appariement de graphe, dont une étude appliquée aux problèmes de reconstruction peut être trouvée dans les travaux de Rolland [ROLL 91].

#### V.1.1.2- Formes dont l'ajustement est délicat.

La difficulté d'ajuster les contours de deux sections peut soit provenir de la connaissance que l'on possède sur l'objet, soit de la morphologie des différents contours. Nous prendrons deux exemples à caractère géologique qui sont respectivement illustrés en figure V.1 et en figure V.2.

##### • Grande connaissance sur l'objet :

Dans le premier exemple, il s'agit de reconstruire la surface d'un pli renversé à partir de sa trace sur deux sections consécutives. Chaque section comporte un seul contour dont la forme est relativement simple.



**Figure V.1 :** Quand la connaissance de la structure de l'objet est très forte, les méthodes utilisant un ajustement "aveugle" (figure C) ne permettent pas toujours d'obtenir les résultats souhaités par l'utilisateur (figure B).

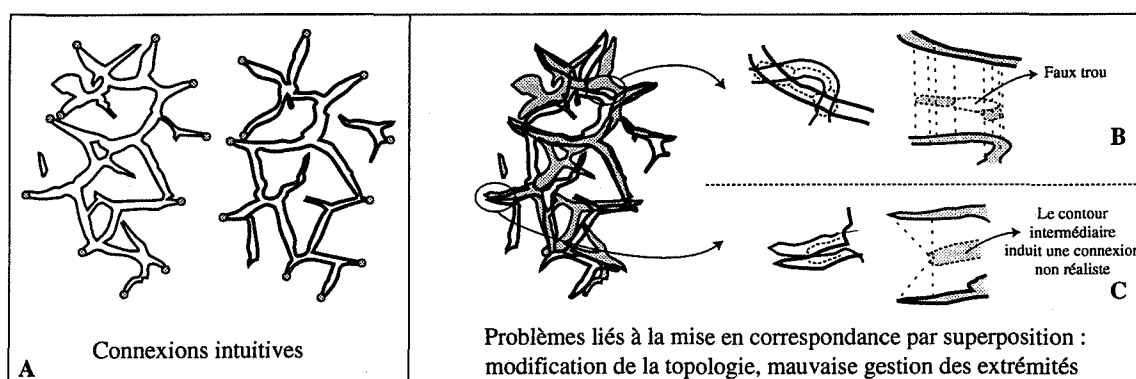
La reconstruction de ce pli implique de faire correspondre les deux synclinaux et les deux anticlinaux afin de conserver la topologie du pli renversé (cf. fig. V.1A). Il faudra donc respectivement relier les points A1 et A2 et les points B1 et B2 (cf. fig. V.1B).

Un ajustement même manuel des deux plis ne pourra sans doute pas faire correspondre, au sens de proximité, ces deux couples de points en même temps. La reconstruction opérera

donc sur un autre type d'association qui ne satisfera pas aux exigences du géologue (cf. fig. V.1C).

• Formes filaires avec de nombreuses excroissances :

Le deuxième exemple est illustré par la figure V.2. Il s'agit de reconstruire le réseau de fracturation interne d'un nodule de barytine. Les différentes sections sont obtenues par découpage du nodule selon des plans parallèles. Seules, les traces des fissures internes sont conservées, le contour externe du nodule est lui supprimé.



**Figure V.2 :** Problèmes pouvant survenir lors de la mise en correspondance par superposition de formes filaires.

Sur cet exemple, les coupes n'étant pas trop espacées, les formes des deux sections ont visuellement une forte ressemblance. Le nombre de branches et de trous varie peu entre deux sections. Un ajustement correct consiste à superposer l'ensemble des extrémités des branches des fractures d'un niveau avec les branches des fractures équivalentes de l'autre section (cf. fig. V.2). On voit bien qu'il n'est pas possible d'effectuer ici un ajustement global des formes. En effet, un tel ajustement permettrait au plus de superposer une partie seulement des différentes branches. D'autre part, ceci conduirait à créer des zones d'influence artificielles qui modifieraient la topologie générale de l'objet. Ceci est illustré par les figures V.2B et V.2C où la superposition partielle de deux branches induit soit une rupture de la continuité de l'objet qui ne s'impose pas, soit un décalage dans la connexion des extrémités des branches. Dans le premier cas, des trous apparaissent dans la surface de l'objet, alors que les sections initiales peuvent être connexes.

En résumé, nous dirons que les techniques d'ajustement peuvent être difficilement applicables quand une superposition des différents contours à l'aide de transformations globales ne permet pas de conserver les liens déduits de la connaissance de l'objet ou de sa topologie d'ensemble.

### V.1.2 - Choix d'une stratégie de reconstruction

Des notions évoquées dans le paragraphe précédent se dégagent une évidence : la méthode de reconstruction universelle n'existe pas et le choix d'une approche est fonction de l'application, de la complexité des données utilisées, et de la connaissance a priori que l'on possède de la structure à reconstruire.

Dans les cas où un "bon" positionnement préalable des formes peut être réalisé facilement, l'emploi de méthodes de reconstruction du type de celles que nous suggérons présentent un réel intérêt. Elles sont rapides, automatiques et gèrent de manière systématique les variations de topologie (cf. Chap. VI).

En revanche, quand les formes sont filaires et qu'elles possèdent de nombreuses excroissances, les approches par appariements de points, comme celles présentées par Lin et al [BURR 81a, 81b], [LILI 87], [CHLI 88], par Sederberg [SEGR 92], [SEGA 93], par Collin [COLL 94], paraissent mieux adaptées. Malheureusement, ces méthodes ne sont souvent pas à même de traiter de manière systématique les variations de topologie, comme les branchements et la présence de plusieurs trous dans les formes.

Nous exposerons dans le chapitre V.3 une méthode mixte qui combine les informations données par les approches par appariement de points et les informations topologiques sur les formes provenant de la squelettisation des contours à l'aide du réseau bissecteur.

Nous délaissions les autres types de méthodes de reconstruction exposées au chapitre II car ils n'apportent pas de solutions aux difficultés que nous rencontrons sur les jeux de données que nous avons utilisés.

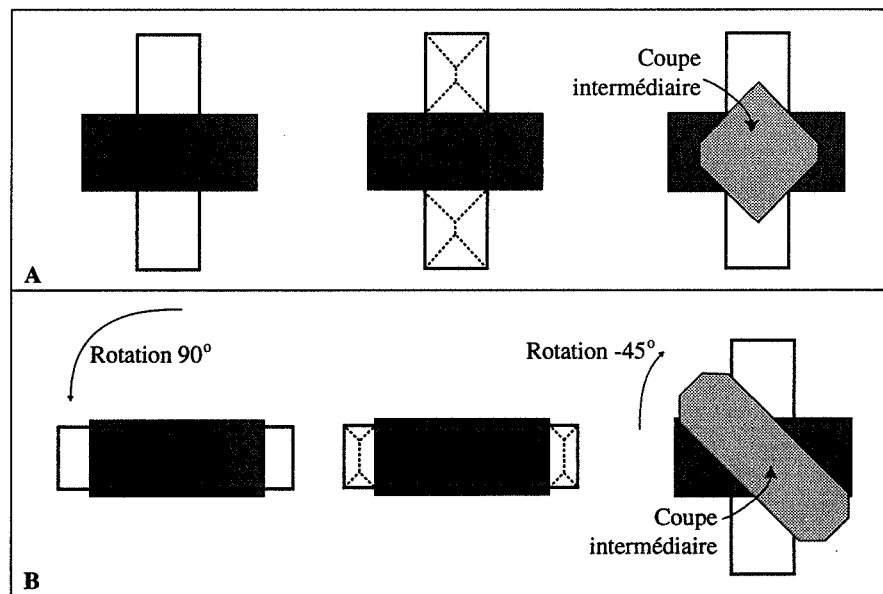
## V.2 - Ajustement des formes

Si les données se prêtent à l'utilisation de notre méthode de reconstruction nous devons au préalable ajuster les formes des deux sections consécutives.

### V.2.1 - Ajustement manuel

Le recours à l'action de l'utilisateur est sans doute l'une des meilleures manières d'effectuer l'ajustement des formes. Ce dernier dispose d'un certain nombre d'opérateurs (translations, rotations, dimensionnements) qui lui permettent de faire coïncider au mieux les différents contours des deux sections en fonction de son intuition et de ses connaissances du domaine applicatif. L'opérateur peut être aidé par l'affichage simultané du squelette interne des contours sur lequel sont conservées uniquement les branches jugées intéressantes pour la description de la forme.

La reconstruction est ensuite effectuée, et dans une dernière étape tous les contours sont déformés de manière inverse afin de retrouver leur position initiale. Dans notre cas, les contours des sections intermédiaires subissent une déformation inverse, proportionnelle à la position suivant l'axe des Z de la section considérée. Par exemple, si une section est traduite de 100 unités par rapport aux axes  $Ox Oy$ , le contour intermédiaire sera traduit durant la dernière étape de -50 unités selon ces mêmes axes.



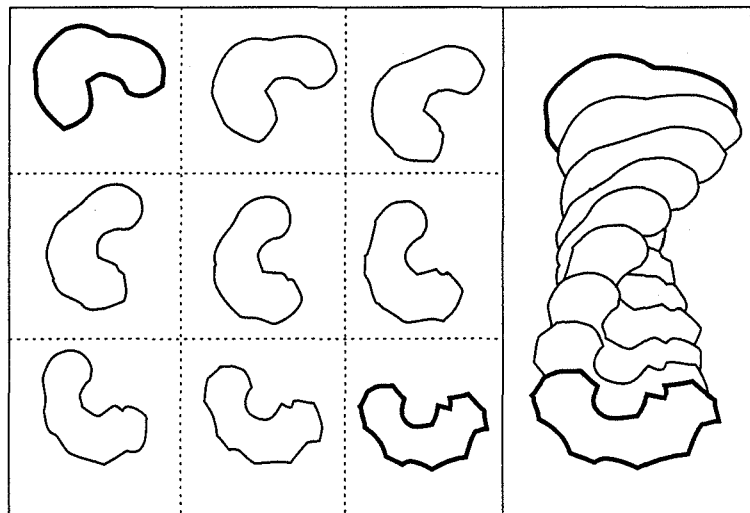
**Figure V.3 :** Un ajustement même rapide peut améliorer de manière importante le résultat.

L'intervention de l'utilisateur dans ce cas de figure n'est pas une opération aussi longue que celle effectuée dans le cadre de la mise en correspondance des points de deux sections. Il



s'agit simplement d'effectuer une ou deux fois une opération globale de transformation comme une translation et une rotation par exemple. Nous avons observé dans la pratique que de simples interventions de ce type permettaient d'améliorer de manière sensible le résultat de la reconstruction (cf. fig. V.3)

D'autre part, dans notre cas l'utilisateur n'a pas à se soucier de l'ampleur des déformations subies par les contours. En effet, l'ajout de plusieurs coupes intermédiaires garantit un passage "en douceur" entre les deux sections initiales. Ceci est surtout important dans le cas de fortes rotations. Comme l'illustre la figure V.4, l'utilisation de coupes intermédiaires évite ainsi toute auto-intersection de la surface finale après avoir effectué l'ensemble des déformations inverses.



**Figure V.4 :** L'ajout de coupes intermédiaires permet d'exclure les problèmes d'auto-intersection de la surface.

### V.2.2 - Ajustement automatique

Bien que l'ajustement de deux formes ne soit pas une opération fastidieuse pour l'opérateur, si le nombre de coupes est très important il peut être utile de proposer une méthode d'ajustement automatique.

Nous n'avons pas implémenté une telle méthode car le nombre de sections dont nous pouvons disposer en géologie est souvent très limité. D'autre part, les tests que nous avons effectués sur des données médicales ne justifiaient pas un ajustement préalable car les coupes étaient toujours perpendiculaires à l'axe vertical de l'organe ou de la structure osseuse à reconstruire.

Néanmoins, il est relativement facile d'imaginer les différents stades d'une telle procédure :

- 1 - construction des squelettes de chacune des formes  $F_a$  et  $F_b$ ,
- 2 - identification des ensembles  $S_a$  et  $S_b$  des points les plus caractéristiques (points triples) des squelettes de chaque forme,
- 3 - choix du couple le plus caractéristique de points,  $P_a$  et  $P_b$ , appartenant respectivement à l'ensemble  $S_a$  et  $S_b$ ,
- 4 - translation de l'une des formes ( $F_a$  par exemple) afin de faire correspondre  $P_a$  et  $P_b$ ,
- 5 - éventuellement, rotation des deux formes calculées à partir de l'angle entre les branches principales du squelette issues des points  $P_a$  et  $P_b$ ,
- 6 - et enfin dimensionnement permettant de faire correspondre les boîtes englobantes des deux formes.

Cet ajustement n'est qu'approximatif, il permet de faire correspondre grossièrement deux formes. Il s'agit en effet de déterminer sur chaque section le point triple (ou érodé ultime) qui possède la plus grande influence sur la section considérée. Un point triple est un sommet de jonction entre trois bissectrices qui ne sont pas directement issues des sommets du contour.

Lorsque les formes sont trouées, il convient de squelettiser uniquement les contours externes afin de s'affranchir des modifications du squelette introduit par la présence des trous. Dans le cas de formes non connexes, la procédure devra opérer sur le point triple dont la distance au contour est la plus grande. Seuls seront donc concernés les deux plus "gros" contours.

Tous les squelettes sont généralement très sensibles au bruit [BLUM 73], [CHMO 91], [ATMO 93], c'est à dire qu'une légère modification du contour de la forme entraîne une assez forte modification de son squelette. Comme dans notre cas nous nous intéressons uniquement au sommet triple dont la distance ("cristalline") au contour est la plus grande, des modifications légères du contour capables de modifier localement la forme et le nombre de branches du squelette ne sont pas à même de modifier radicalement la position du point qui nous intéresse. Seule, la présence d'une très forte concavité peut introduire un changement important dans la configuration du réseau bissecteur.

Cette approche est purement heuristique et ne peut s'appliquer que si les hypothèses sur les formes décrites au paragraphe V.1.1.1 sont remplies. C'est une méthode qui doit pouvoir être mise en œuvre assez facilement et qui, sous la réserve énoncée ci-dessus, doit pouvoir fournir des résultats satisfaisants.

Une autre approche décrite par Rolland [ROLL 91] peut être employée de manière beaucoup plus systématique dans le traitement des étapes 2 et 3. Sa technique (cf. § II.4.2) est

basée sur l'utilisation d'une approximation de l'axe médian discret, la ligne médiane. L'auteur cherche à mettre en correspondance la plupart des nœuds caractéristiques de la ligne médiane afin de pouvoir inférer des squelettes intermédiaires, et dans un deuxième temps, construire les formes intermédiaires liées à ces squelettes. Sa méthode doit pouvoir être étendue sans difficultés dans le domaine continu qui nous intéresse en remplaçant la ligne médiane par le réseau bissecteur. Dans notre cas, la mise en correspondance des points triples les plus "internes" (les sommets principaux de Rolland) très caractéristiques de chaque forme suffit à établir les connexions souhaitées. Les problèmes de temps de calcul rencontrés par l'auteur lors de la recherche des cliques dans le graphe de mise en correspondance devrait pouvoir disparaître, et la procédure devrait de ce fait être largement simplifiée.

## V.3 - Méthodes par appariement de points

Les méthodes d'appariement [BURR 81a, 81b], [LILI 87], [CHLI 88], [SEGR 92], [SEGA 93], [COLL 94] utilisent entre autres la notion de distance entre les points pour effectuer les mises en correspondance. De plus, elles sont souvent incapables de détecter seules une déformation importante (une rotation par exemple) entre deux formes similaires. Pour ces raisons, il est souhaitable d'effectuer, comme pour les méthodes basées sur une mise en correspondance des contours par projection, un ajustement préalable des formes. Ce que nous venons d'expliquer dans le paragraphe précédent peut donc être aussi utilisé comme pré-traitement des méthodes d'appariement de points.

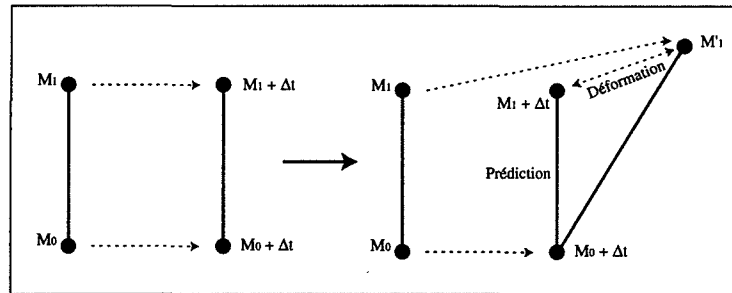
Dans cette section nous allons nous appuyer largement sur la méthode proposée par Collin [COLL 94] pour effectuer la mise en correspondance de points dans des images de facules solaires<sup>2</sup>. C'est d'ailleurs grâce à sa collaboration que nous avons pu réfléchir à la technique d'appariement que nous proposons dans les paragraphes suivants.

### V.3.1 - Regard sur les méthodes de programmation dynamique

La méthode décrite par [COLL 94] cherche à caractériser la déformation subie par une courbe entre deux instants  $t$  et  $t + \Delta t$ . Cette approche s'appuie sur l'analyse linéaire de déformations élastiques. Il s'agit de réaliser une association entre les points de la courbe à l'instant  $t$  et ceux de la courbe à l'instant  $t + \Delta t$ .

---

<sup>2</sup> Les facules solaires sont des émissions lumineuses de la surface du soleil dont les déformations renseignent sur l'état de ce dernier.

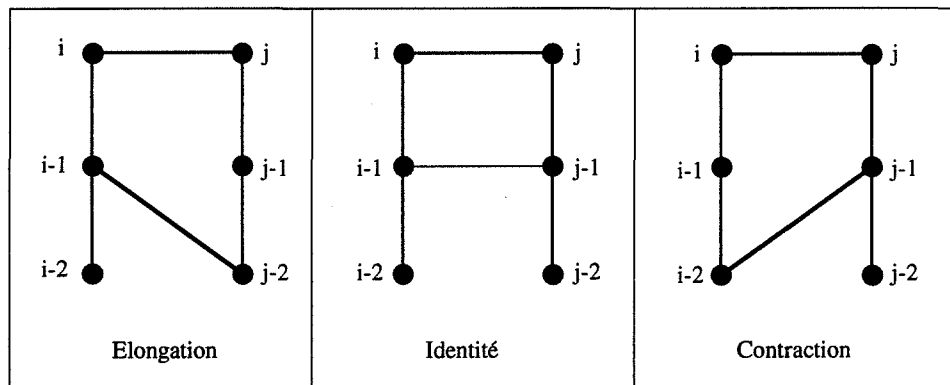


**Figure V.5 :** La mesure de la déformation est le critère utilisé par la fonction de coût.

Cette recherche d'associations autorise la présence d'élongations et de contractions lors du passage d'une courbe à l'autre. Ces associations sont déterminées par programmation dynamique utilisant une fonction de coût.

La fonction de coût est basée sur le taux de déformation que subit un segment de la courbe. Si le segment  $[M_0, M_1]$  illustré par la figure V.5 ne subit pas de déformation, il doit être représenté à l'instant  $t + \Delta t$  par le segment  $[M_0 + \Delta t, M_1 + \Delta t]$ . Dans le cas contraire la déformation se caractérise par le déplacement  $[M_1 + \Delta t, M'_1]$ .

Le schéma associatif des différents points permet d'effectuer des contractions, des élongations et des identités. Ces schémas correspondent respectivement à une association entre les points  $i$  et  $j$  et les points  $(i-1, j-2)$ ,  $(i-1, j-1)$  et  $(i-2, j-1)$  sur la figure V.6.



**Figure V.6 :** Schéma associatif des points de deux chaînes.

L'exemple présenté associe à chacun des types deux niveaux de profondeur. Dans la pratique, l'auteur montre que la recherche de schéma associatif sur un niveau supérieur apporte peu d'améliorations, en augmentant inutilement les temps de résolution.

La meilleure association est donnée par le chemin du graphe qui minimise le coût global de l'ensemble des associations en fonction d'un coût local lié à l'amplitude de la déformation et au type de schéma associatif adopté.

Cette méthode d'appariement donne de bons résultats sur des formes filaires avec de nombreuses excroissances si les formes n'ont pas subi de trop fortes déformations globales, comme des rotations, des translations, etc... En effet, les résultats restent relativement liés à la proximité des points à associer.

### V.3.2 - L'apport d'un descripteur de formes

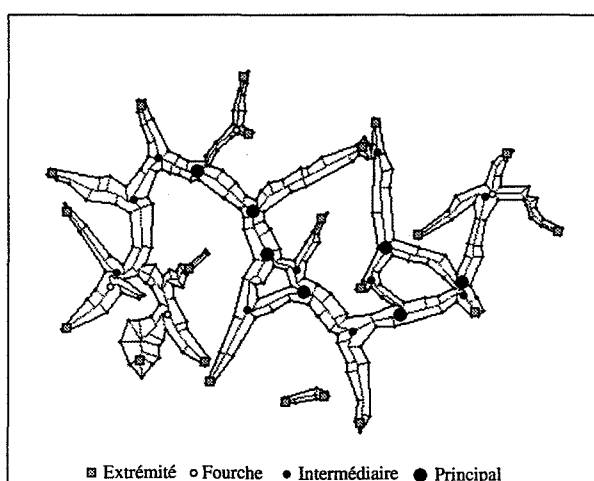
La méthode présentée ci-dessus peut être comparée aux approches contours. En ce sens, elle utilise uniquement les informations liées à ces contours, positions des points consécutifs, déformations entre les segments, etc...

Il semblait intéressant, sur certains exemples géologiques complexes où notre méthode de reconstruction ne fournissait pas directement des résultats satisfaisants, de forcer certaines associations qui dépendent plus de la morphologie et de la topologie globale des formes que de l'aspect géométrique local du contour.

Nous avons utilisé pour cela les informations fournies par le réseau bissecteur pris ici comme un descripteur de forme. La même démarche peut être réalisée à l'aide du diagramme de Voronoï généralisé des contours de la forme.

#### V.3.2.1 - Utilisation des informations données par le réseau bissecteur

L'extraction à partir du réseau bissecteur du graphe caractéristique de la forme permet de mettre en évidence les sommets qui sont réellement symptomatiques de la forme à étudier.

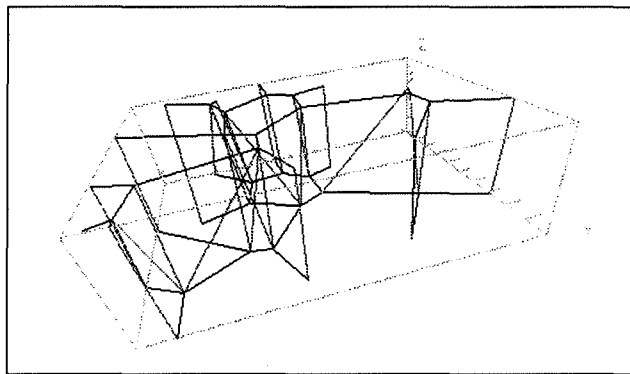


**Figure V.7 :** Les différents sommets du réseau bissecteur caractéristiques d'une forme. Il y a les extrémités et les sommets triples. Ces derniers sont composés des fourches (reliés à au moins deux extrémités), les sommets intermédiaires (reliés à une extrémité ou à une fourche), et les sommets principaux.

Ces sommets possèdent les caractéristiques suivantes (cf. fig. V.7):

- position en X et Y,
- type de sommets (Principal, Intermédiaire, fourches, extrémités),
- arêtes du contour qui leur sont relatifs.

La mise en correspondance élastique permet de définir des couples de points des graphes des deux formes ayant une très forte relation. A partir de ces appariements qui sont considérés comme "sûrs", on vient forcer dans le graphe d'association de l'ensemble des points des contours les coûts associés aux points du contour liés aux appariements des sommets du graphe.



**Figure V.8 :** Résultat de l'appariement de deux graphes du réseau bissecteur par la méthode de programmation dynamique.

Ceci permet de définir des associations entre des points des deux formes, l'appariement se limitant à mettre en correspondance les points des portions de contour limitées par deux couples de points appariés. A l'issue de la procédure l'ensemble des points peuvent être reliés.

Cette approche mixte donne des résultats très satisfaisants sur les exemples que nous avons testés (cf. fig. V.8).

### **V.3.2.2- Extension aux formes non connexes et trouées**

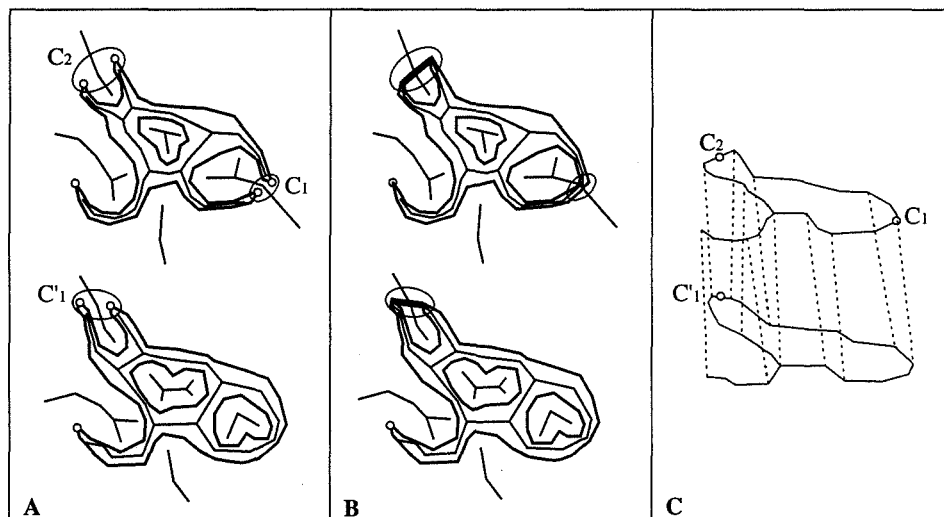
Malheureusement, la programmation dynamique ne peut s'appliquer que sur un squelette ne comportant qu'un seul cycle (un contour externe et un trou), et donc une seule chaîne.

La méthode la plus simple pour contourner ce problème est de se ramener dans tous les cas à la mise en correspondance de deux chaînes linéaires.

Nous allons donc effectuer un traitement sur chacune des formes qui s'appuie sur la construction du réseau bissecteur interne et externe de la forme considérée afin de se ramener à cette situation.

Le réseau bissecteur interne met en évidence les points caractéristiques situés à l'extrémité des branches de la forme (cf. fig. V.9A). Le réseau bissecteur externe permet de créer artificiellement des ponts entre des points non consécutifs sur les contours, dont au moins un des points est une des extrémités déterminées précédemment à l'aide du réseau bissecteur interne (cf. fig. V.9B). Ces connexions peuvent être réalisées sur des points appartenant ou n'appartenant pas au même contour. Dans le premier cas, la procédure revient à créer un nouveau trou, dans le second, elle agglomère deux contours externes.

Le fait de savoir si deux contours externes doivent être reliés est pour le moment réalisé de façon empirique en fonction de la distance séparant les deux points considérés.



**Figure V.9 :** Principes de transformation de chaque contour en chaîne linéaire ne comportant au plus qu'un seul cycle.

L'étape suivante consiste à appliquer aux deux contours externes le traitement défini au paragraphe V.3.2.2 afin d'apparier l'ensemble des points de ces contours (cf. fig. V.9C).

Après ce stade deux étapes sont nécessaires.

La première est de savoir si les ponts artificiellement créés aux étapes précédentes sont justifiés (cf. fig. V.9C). Si une connexion implique deux ponts créés précédemment ( $C_2 - C'_1$ ), alors cette connexion est inutile et ces deux ponts sont détruits. Le contour de chaque forme est ensuite reconnecté.

Si en revanche un pont est connecté avec une portion de contour initialement présente dans la forme ( $C_1$ ), nous sommes en présence d'une zone de branchement. La connexion de ces branchements ne pose pas de problèmes particuliers étant donné que le pont peut être utilisé pour relier les deux contours.

La deuxième étape est le traitement des éventuels trous. Nous nous sommes contentés dans un premier temps de connecter les trous un par un. Nous n'autorisons donc pas les zones de branchement liées aux contours internes.

Du fait du faible nombre de contours internes présents dans nos données, et du faible nombre de points de chaque contour, nous réalisons toutes les associations possibles entre les contours avant de décider quels sont les contours internes qui doivent être effectivement reliés. Cette combinatoire est bien évidemment limitée par une notion de proximité entre les contours (recouvrement des boîtes englobantes). Seule la connexion entraînant le coût d'association le plus faible est conservée.

Cette approche donne des résultats conformes à notre attente pour le jeu de données qui ne permettait pas l'utilisation de la méthode de reconstruction exposée au chapitre III.

Son extension à d'autres jeux de données n'est pas directe, en particulier à cause du besoin de relier l'ensemble des contours en un seul, et du traitement isolé des trous. De plus, la connexion de l'ensemble de tous les contours internes est empirique et dépend largement du type de données traitées. Sur les exemples de nodules traités en géologie, elle nous a toutefois donné entière satisfaction.



## - CHAPITRE VI -

# Interpolation et reconstruction 3D

Ce chapitre prend en compte les deux étapes centrales de la méthode de reconstruction, à savoir la recherche des zones différences entre chaque couple de sections consécutives et la construction du réseau bissecteur dans chacune de ces aires différences dans le but de déterminer les différentes coupes intermédiaires.

### VI.1 - Détermination des zones différences

En préambule, nous allons rappeler quelques notations et définitions qui nous serviront pour la suite de ce chapitre et qui sont illustrées par la figure VI.1.

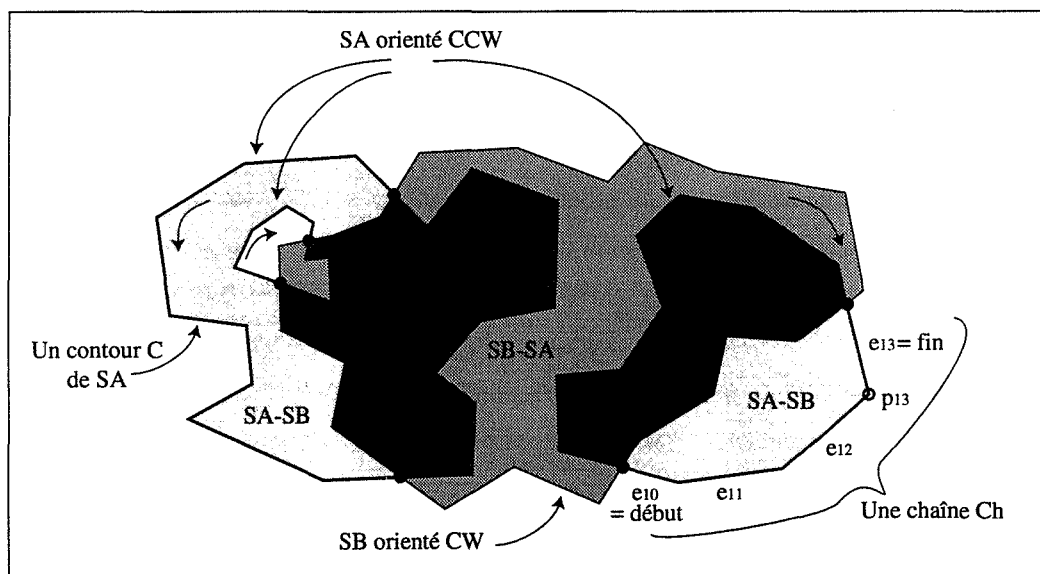


Figure VI.1 : Illustration de la notion de chaînes et de zones différences.

- Une **arête**, notée  $e_i$ , est un segment fermé qui possède deux points extrémités. Le point d'intersection entre deux arêtes consécutives  $e_{i-1}$  et  $e_i$  est noté  $p_i$ .
- Un **contour**, noté  $C$ , est un polygone simple (dont les arêtes ne s'auto-intersectent pas) composé de  $n$  arêtes  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_n$ .
- Une **forme** polygonale simple est composée par un ensemble de contours orientés de telle manière que l'intérieur de la forme soit à gauche de chaque arête. Les contours externes

sont donc orientés dans le sens trigonométrique, noté CCW (Counterclockwise), les contours internes (ou les trous) sont eux orientés dans le sens horaire, noté CW (Clockwise).

Cette orientation est appelée "positive" par opposition à l'orientation "négative" où les contours externes sont orientés CW et les trous CCW.

- Une suite continue d'arêtes qui appartiennent toutes à une même section est appelée **chaîne**. La première et la dernière arête d'une chaîne sont respectivement appelées le **début** et la **fin** de la chaîne.

- La zone d'intersection entre deux formes SA et SB (ou entre SB et SA) est notée  $SA \cap SB$ , la zone différence entre SA et SB est notée  $SA - SB$ , tandis que la zone différence entre SB et SA est notée  $SB - SA$ .

Nous nous intéressons ici à deux formes consécutives, nommées SA et SB, et nous supposons sans perte de généralité que l'altitude de SA est inférieure à celle de SB.

Après avoir éventuellement effectué le positionnement des deux formes l'une par rapport à l'autre, il est nécessaire dans le cadre de notre approche de déterminer ensuite les zones différences entre ces formes. Nous allons donc projeter orthogonalement ces deux formes sur un même plan P, parallèle aux plans des deux sections SA et SB.

La recherche des zones différences est inspirée de la méthode de détermination des intersections entre segments, proposée en 1979 par Bentley et Ottmann [BEOT 79]. Cette technique utilise un balayage du plan qui permet de conserver une cohérence topologique entre deux états différents de la droite de balayage. Cette caractéristique a dans notre cas un intérêt majeur. Par rapport à d'autres méthodes qui se contentent de déterminer uniquement les points d'intersection, la méthode de Bentley et Ottmann va permettre d'extraire directement au fur et à mesure de l'avancement du balayage les formes différences avec leurs éventuels contours internes. De plus, si les structures de données adéquates sont employées, la complexité de cette méthode est très bonne.

Nous verrons par la suite que ce jugement doit être tempéré par la faible robustesse de l'algorithme qui est le handicap majeur de cette méthode. Nous décrirons brièvement certaines méthodes qui peuvent être mises en œuvre pour essayer d'y remédier.

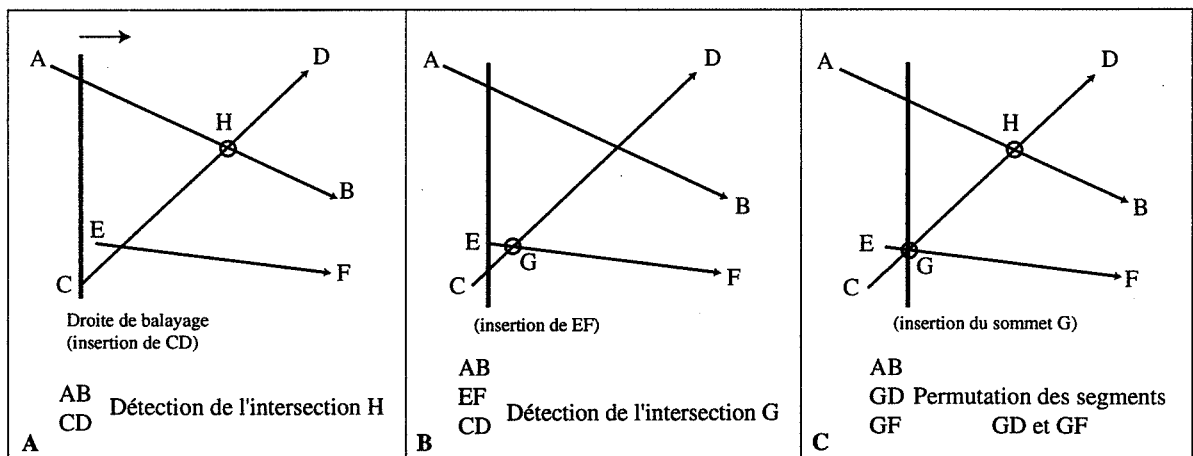
### VI.1.1 - Balayage de type "Bentley et Ottmann"

• *Rappel de la méthode de Bentley et Ottmann*

L'algorithme s'applique sur un ensemble de segments dont les extrémités sont triées dans l'ordre lexicographique<sup>1</sup>. Les deux extrémités d'un segment sont appelées respectivement origine et extrémité, le point origine étant inférieur dans l'ordre lexicographique au point extrémité. Ces différents sommets définissent un ensemble de points nommé *x-ordre*.

En partant de l'abscisse de l'élément minimum du *x-ordre*, une droite verticale, dite "droite de balayage", se déplace parallèlement à elle-même en sautant d'éléments en éléments du *x-ordre*. Une structure, que l'on nomme le *y-ordre*, contient l'ensemble des différents segments présents à la verticale de l'élément courant du *x-ordre* matérialisé par la droite de balayage. Ces segments, appelés "segments actifs", sont triés en fonction de l'ordonnée croissante de leur point d'intersection avec la droite de balayage. Le contenu du *y-ordre* à un instant précis et l'ordre des segments dépend, bien sûr, de la localisation de cette droite de balayage.

Il faut toutefois remarquer que le *y-ordre* est une structure héréditaire dont l'état n'évolue que localement entre deux positions consécutives de la droite de balayage. La figure VI.2 montre les états de la droite de balayage pour trois positions différentes.



**Figure VI.2 :** Les états de la droite de balayage après insertion de différents sommets.

L'ordre de deux segments présents à deux positions différentes de la droite de balayage ne peut être modifié que si un nouveau sommet, extrémité d'un segment ou point d'intersection, est rencontré. De plus, deux segments ne peuvent avoir d'intersection à un

<sup>1</sup> Soient deux points  $A(x_a, y_a)$  et  $B(x_b, y_b)$  :

Le point A est dit inférieur lexicographiquement au point B ssi  $(x_a < x_b \vee (x_a = x_b \wedge y_a < y_b))$ .

instant  $t$  que s'ils étaient adjacents sur le y-ordre à l'instant  $t - \Delta t$ . Ceci est une remarque très importante car elle réduit la recherche des intersections entre deux segments au seul cas où l'ordre entre ces segments est modifié.

Un segment est inséré dans le y-ordre quand on arrive à la verticale de son point origine (cf. fig. VI.2A). On teste alors l'intersection entre ce segment et ses deux voisins respectivement supérieur et inférieur dans le y-ordre, quand ils existent. Si deux segments s'intersectent effectivement, le point d'intersection est inséré dans le x-ordre au même titre qu'une extrémité d'un segment (cf. fig. VI.2B).

De manière analogue, un segment est supprimé du y-ordre quand on arrive à la verticale de son point extrémité. On teste alors l'intersection entre les deux segments voisins supérieurs et inférieurs dans le y-ordre, s'ils existent. Si ces segments s'intersectent et si le point d'intersection n'a pas déjà été détecté, il est à nouveau inséré dans le x-ordre.

La rencontre d'un point d'intersection entre deux arêtes par la droite de balayage induit une permutation de ces segments dans le y-ordre. Pour chacun des deux segments nous devons alors tester l'intersection avec son nouveau voisin (cf. fig. VI.2C).

Notons qu'à la verticale d'un sommet une intersection n'est valide que si elle est située à droite du sommet considéré.

#### • Complexité et structures de données

L'algorithme pour  $N$  segments supposés disjoints peut être schématisé ainsi :

- 1) Insérer les  $2N$  extrémités dans x-ordre en les classant dans l'ordre lexicographique  
Initialiser la droite de balayage à vide
- 2) **Pour** (chaque sommet  $P$  du x-ordre)
  - Au cas où**
    - :  $P$  est l'origine d'un segment  $S$ 
      - 3a) Insérer  $P$  dans le y-ordre
      - 4) **Si** ( $S$  intersecte le segment supérieur à  $S$  dans le y-ordre au point  $I$ )
      - 1) Insérer le point  $I$  dans le x-ordre
      - Fin de Si**
      - 4) **Si** ( $S$  intersecte le segment inférieur à  $S$  dans le y-ordre au point  $I$ )
      - 1) Insérer le point  $I$  dans le x-ordre
      - Fin de Si**
    - :  $P$  est l'extrémité d'un segment  $S$ 
      - 4) **Si** (le segment supérieur à  $S$  intersecte le segment inférieur à  $S$  au point  $I$ )
      - 1) Insérer le point  $I$  dans le x-ordre
      - Fin de Si**
  - 3b) Supprimer  $S$  du y-ordre
  - :  $P$  est le point d'intersection entre les segments  $S_1$  et  $S_2$  /\* tel que  $S_1 > S_2$  \*/
    - 3c) Permuter  $S_1$  et  $S_2$  dans le y-ordre
    - 4) **Si** ( $S_2$  intersecte le segment supérieur à  $S_2$  au point  $I$ )
    - 1) Insérer le point  $I$  dans le x-ordre
    - Fin de Si**
    - 4) **Si** ( $S_1$  intersecte le segment inférieur à  $S_1$  au point  $I$ )
    - 1) Insérer le point  $I$  dans le x-ordre
    - Fin de Si**
  - Fin de Cas**
- Fin de Pour**

La complexité générale de l'algorithme dépend de la complexité des étapes 1, 2, 3 et 4.

Le y-ordre doit faciliter l'insertion (3a) et la suppression (3b) d'un segment, la permutation de deux segments (3c), et la recherche des voisins inférieur et supérieur d'un segment donné (4). La structure de donnée la mieux adaptée est un arbre binaire équilibré qui permet d'effectuer ces opérations en  $O(\log n)$ .

Le x-ordre suppose la recherche efficace du point d'abscisse minimum et sa destruction (2), ainsi que l'insertion (1) d'un nouveau sommet. Bentley et al. [BEOT 79] recommandent l'utilisation d'un tas (heap en anglais) puisqu'il permet de déterminer le point de x minimum en  $O(1)$  et réalise les deux autres opérations en  $O(\log n)$ . Michelucci [MICH 87] propose, pour ne pas multiplier les structures de données, d'utiliser aussi un arbre binaire équilibré pour le x-ordre, sachant que les opérations de recherche et de suppression de n'importe quel élément sont aussi réalisées en  $O(\log n)$ . Dans un cadre d'application plus général, l'utilisation de cette même structure permet en outre de se rendre compte si deux sommets du x-ordre sont confondus, et d'effectuer les traitements nécessaires [MORE 90].

Soit  $n$ , le nombre total de segments à traiter. Si l'on considère que le calcul d'intersection est en  $O(1)$  et que  $k$  points d'intersection ont été déterminés nous pouvons déterminer le nombre de fois où l'on effectue chacune des étapes. Le nombre d'insertion et d'extraction d'éléments du x-ordre (étape 1 et 2) est de  $(n + k)$ . Le nombre d'insertion, de suppression et de permutation (étape 3) liés au y-ordre est de  $(n + k)$ , ainsi que le nombre de recherche des segments voisins (étape 4) dans le y-ordre.

Comme  $k$  peut être en  $O(n^2)$  dans le pire des cas si tous les segments ont une intersection, la complexité de  $O(\log(n + k))$  de chacune des étapes peut s'écrire  $O(\log n^2)$  soit  $O(2 \log n)$ . La complexité générale de l'algorithme s'écrit donc  $O((n + k) \times 2 \log n)$  soit  $O((n + k) \log n)$ .

Notons que la complexité de la méthode reste équivalente à celle d'un algorithme naïf qui testerait deux à deux l'intersection de l'ensemble des segments ( $O(n^2)$ ), soit une complexité en  $O(n^2 \log n)$ , si le nombre  $k$  d'intersections détectées est lui-même en  $O(n^2)$  [BEOT 79], [MICH 87].

## VI.1.2 - Extension de l'algorithme à la construction des formes

Dans le cadre de notre application, il ne s'agit plus de déterminer l'intersection de segments isolés, mais celle d'arêtes appartenant à des formes polygonales. La finalité de cet algorithme est de déterminer à la fin du balayage les zones différences de deux sections voisines SA et SB [OTWI 85]. Pour conserver un sens de parcours cohérent des contours à chaque nouveau point d'intersection (respect de la règle dite "tourner à gauche" [WEAT 77]), la section SA est orientée dans le sens positif alors que SB l'est dans le sens négatif.

### VI.1.2.1 - Modifications et ajouts de structure de données

L'utilisation et l'adaptation à notre problème de l'algorithme de Bentley et Ottmann suppose plusieurs modifications :

- Utiliser des segments appartenant à différents contours
- Pouvoir identifier la création d'une nouvelle forme de différence
- Conserver et mettre à jour ces formes différences au cours de l'avancement
- Restituer les zones différences définitives avec leur type (SA - SB ou SB - SA) à la fin du balayage, et savoir si ces zones résultent ou pas d'intersections entre les contours initiaux.

Nous devons pour cela modifier les structures de données. Pour des raisons déjà exposées, le x-ordre et le y-ordre sont tous deux représenté par des arbres binaires équilibrés<sup>1</sup>. Pour plus de détails sur cette structure classique le lecteur pourra se reporter à [FRGA 90]. Il nous faut de plus définir de nouvelles structures de données pour prendre en compte les zones différences.

#### • *Structure liée au x-ordre*

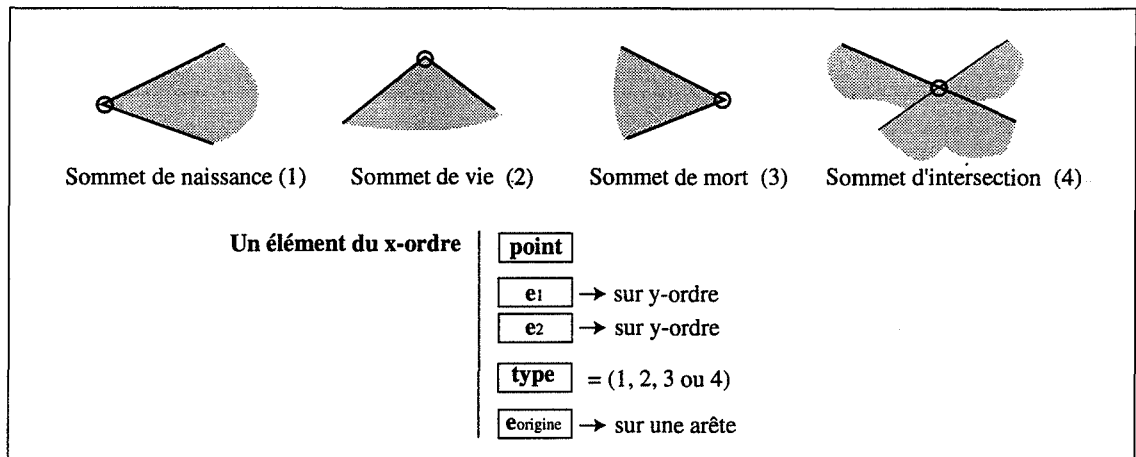
Les différents éléments du x-ordre, représentés par la figure VI.3, sont initialement les sommets des formes SA et SB, et peuvent être de différents types :

- des "sommets de naissance" : si les deux arêtes incidentes au sommet considéré, et donc les deux points voisins précédant et suivant, sont à sa droite
- des "sommets de vie" : si les deux points voisins sont situés de part et d'autre de la droite verticale issue du sommet
- des "sommets de mort" : si les points voisins sont tous deux à gauche du sommet considéré.

---

<sup>1</sup> Notre choix s'est porté sur des arbres AVL.

Le dernier type est représenté par les points d'intersection entre différentes arêtes.



**Figure VI.3 :** Les types de sommets, et la structure modifiée du x-ordre.

Chaque sommet du x-ordre doit pouvoir référencer les deux arêtes incidentes qui appartiennent à un contour initial, ou les deux arêtes qui ont induit un point d'intersection. Nous ajoutons donc deux pointeurs sur des arêtes de l'y-ordre relatives à ce sommet. Cette information permettra de trouver directement les arêtes dans l'y-ordre sans effectuer de parcours d'arbre. Enfin un champ de la structure contient le type du sommet. Un dernier champ permet de référencer l'arête initiale du contour liée au point considéré.

- *Structure liée au y-ordre*

Nous avons ajouté dans la structure définissant les arêtes stockées dans la structure AVL du y-ordre des pointeurs sur les voisins inférieur et supérieur pour accélérer les accès. Trois autres champs permettent de référencer l'objet et le générateur auxquels l'arête est liée, ainsi que l'arête correspondante au sein de ce générateur. Ces pointeurs permettent de mettre à jour directement les formes lors du traitement de nouveaux points du x-ordre.

- *Structures utilisées pour la mise à jour des formes différences*

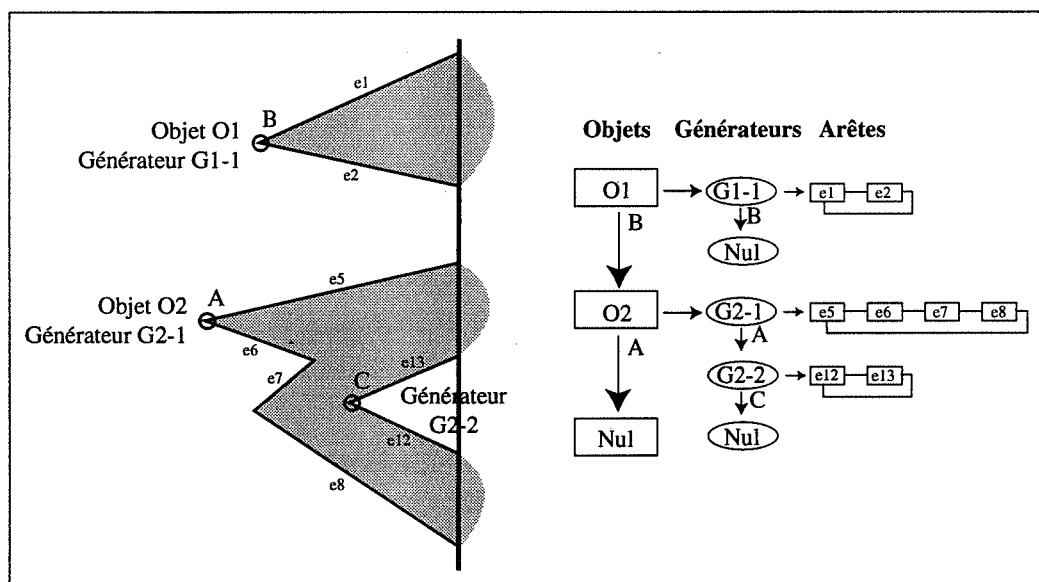
Comme nous voulons calculer les zones différences au cours du même balayage, il nous faut d'autres structures de données qui sont décrites ci-dessous.

- Une "arête" : c'est globalement la même structure que les arêtes des formes SA et SB à laquelle sont rajoutées des informations utiles dans la procédure de balayage, à savoir le point origine et extrémité du segment en fonction de l'ordre lexicographique et un pointeur sur l'arête relative du y-ordre.

- Un "générateur" : Il comprend une liste doublement chaînée d'arêtes. Ces arêtes représentent une portion d'un seul contour qui appartient à une zone différence à un stade donné de l'avancement du balayage. Un de ces champs permet de localiser le sommet le plus à gauche du contour qui est le premier détecté.
- Un "Objet" : Il représente l'état d'une zone différence à une position déterminée de la droite de balayage. C'est une liste chaînée de générateurs, dont chacun représente un contour, externe ou interne, de la forme différence. Deux champs permettent de conserver la mémoire du point le plus à gauche de l'objet et du type de la zone différence (A-B) ou (B-A).

Au cours de l'avancement de l'algorithme ces structures tiendront à jour les différentes formes à chaque traitement d'un nouveau sommet.

Toutes ces structures sont schématisées dans la figure VI.4. Nous avons préféré multiplier raisonnablement les informations liées aux structures afin de nous passer de parcours d'arbres répétitifs, sachant d'autre part que dans le cadre de notre application le nombre de segments présents à un instant donné sur la droite de balayage est généralement relativement faible.



**Figure VI.4 :** Illustration des types permettant l'extraction simultanée des formes différences.



### VI.1.2.2 - Analyse de l'algorithme

Nous allons passer en revue les différentes étapes en commençant par le remplissage du x-ordre avec les sommets des deux formes.

Après avoir respectivement orienté les deux formes SA et SB dans le sens positif et négatif, nous insérons chacun des sommets de ces formes dans l'arbre AVL du x-ordre en le rééquilibrant si nécessaire à chaque ajout. L'insertion permet, bien sûr, d'effectuer en même temps le classement lexicographique de ces sommets. Le type de chaque sommet, naissance, vie ou mort est estimé durant cette étape, et les pointeurs sur les arêtes incidentes à un sommet sont renseignés.

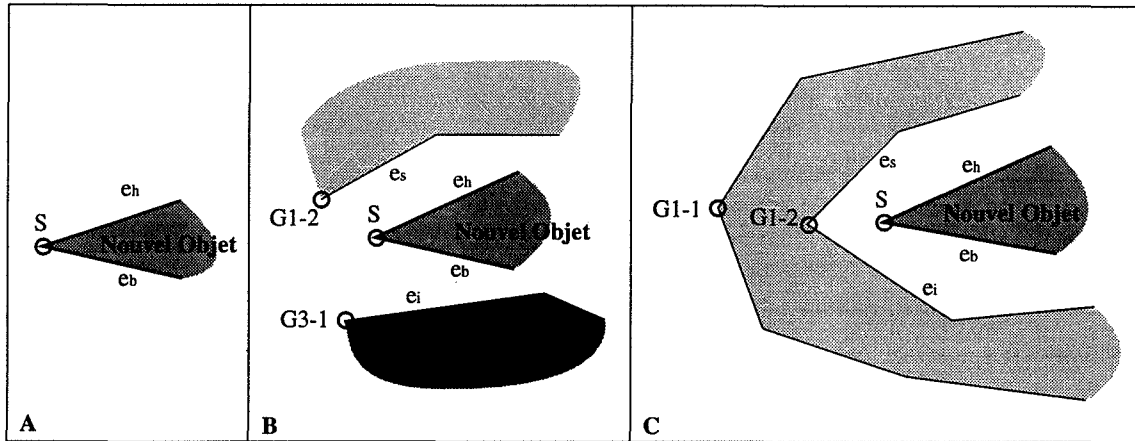
La structure du y-ordre et celles qui sont relatives aux formes différences sont initialisées à vide.

Nous commençons alors à déplacer la droite de balayage en recherchant dans le x-ordre le sommet d'abscisse minimale. Le traitement généré dépend évidemment du type du sommet.

- *Traitement des sommets de naissance :*

Lors du traitement d'un sommet de naissance S, les deux arêtes incidentes au sommet sont insérées dans le y-ordre, et bien sûr classées. De façon générale, chaque fois qu'une arête est insérée dans le y-ordre lorsque la droite de balayage est à la verticale du point origine du segment, une procédure de parcours d'arbre recherche le sommet extrémité dans le x-ordre et renseigne avec l'adresse de l'arête du y-ordre le champ correspondant du sommet extrémité. Ceci permet de déterminer directement la ou les arêtes, dans le cas d'un point d'intersection, présente(s) dans le y-ordre qui doit(vent) être supprimée(s) ou modifiée(s) lors du traitement du sommet extrémité correspondant.

Lors de l'insertion d'une arête, il faut tester l'intersection avec les segments voisins supérieur et inférieur à l'arête, s'ils existent. Une intersection entre deux arêtes adjacentes sur la droite de balayage est trouvée si ces deux arêtes appartiennent à des formes différentes, si elles convergent vers la droite du sommet courant et si elles possèdent effectivement une intersection qui n'a pas déjà été trouvée pour une autre position de la droite de balayage. Si tel est le cas, le point d'intersection déterminé est inséré dans le x-ordre et les champs relatifs aux arêtes du y-ordre sont remplis avec les adresses des deux segments qui ont provoqué l'intersection.



**Figure VI.5 :** Cas d'un sommet de naissance provoquant la création d'un nouvel objet.

Les sommets de naissance provoquent la création d'un nouveau générateur qui comporte les deux arêtes incidentes au sommet S. Le fait de savoir si un sommet de naissance doit aussi induire la création d'un nouvel objet dépend de l'environnement de l'arête dans le y-ordre. En effet, la chaîne initiée par ce sommet peut correspondre à un nouveau contour externe, à un trou, ou à une simple concavité d'un contour. L'indétermination entre ces deux derniers cas ne pourra être levée qu'à l'instant où un sommet de mort sera rencontré sur cette même chaîne.

Nous ne tenons pas compte ici des cas particuliers, comme une intersection au niveau du sommet de naissance, entre un segment situé entre les deux arêtes incidentes à ce sommet. Un nouvel objet est créé si les arêtes voisines,  $e_s$  et  $e_i$ , respectivement supérieure et inférieure à la plus haute et à la plus basse des arêtes incidentes,  $e_h$  et  $e_b$ , du sommet S n'existent pas (cf. fig. VI.5A), ou, si elles existent, elles ne doivent pas appartenir au même objet (cf. fig. VI.5B). Si  $e_s$  et  $e_i$  appartiennent au même objet il faut, pour créer un nouvel objet, qu'elles aient le même générateur et que celui-ci soit différent du générateur ayant initié l'objet concerné (cf. fig. VI.5C).

Lors de la création d'un objet, le type de la zone différence est donné par le sens de parcours de la chaîne : SA - SB et SB - SA si la chaîne est respectivement parcourue dans les sens CCW et CW.

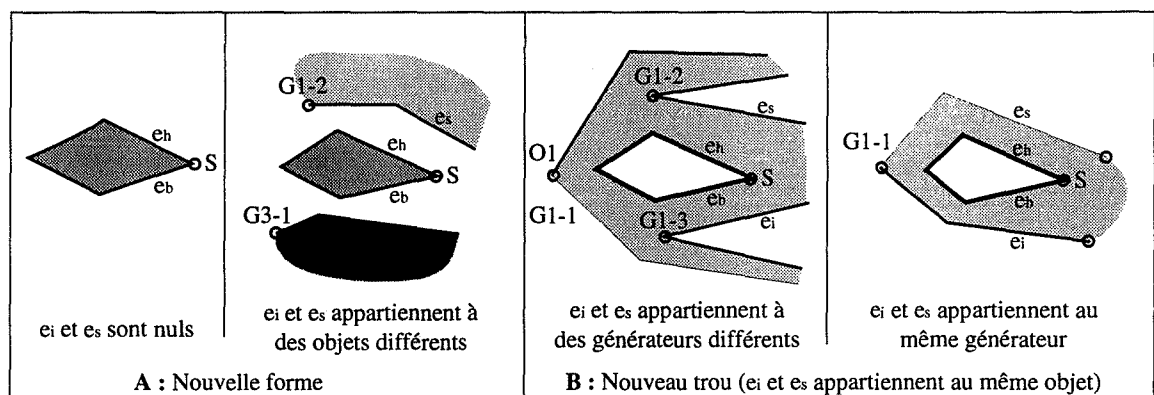
• *Traitement des sommets de vie :*

Il suffit simplement de remplacer dans le y-ordre l'arête incidente gauche par l'arête incidente droite et de tester l'intersection de cette nouvelle arête avec ses deux segments voisins sur le y-ordre, s'ils existent. L'arête nouvellement créée hérite des références de l'objet et du générateur de l'arête supprimée. La nouvelle arête est ensuite ajoutée à la liste d'arêtes du générateur associé.

• *Traitement des sommets de mort :*

Le traitement des sommets de morts est plus complexe et peut se résumer en deux cas principaux.

Lorsque les deux arêtes incidentes au sommet de mort  $S$ ,  $e_h$  et  $e_b$ , ont le même générateur, et donc appartiennent au même objet, un nouveau contour complet a été détecté. Si les deux arêtes voisines de  $e_h$  et de  $e_b$  sur le  $y$ -ordre sont nulles ou si elles appartiennent à deux objets distincts, alors une nouvelle forme différence doit être créée, et elle comprend autant de contours que l'objet a de générateurs (cf. fig. VI.6A). Dans le cas contraire, la procédure vient simplement de détecter un trou (cf. fig. VI.6B). Si une forme vient d'être créée et si elle est de type SB - SA le sens de parcours est inversé pour qu'il redevienne positif.



**Figure VI.6 :** Un sommet de mort peut provoquer la fermeture d'un contour. Il peut soit créer une nouvelle forme (A), soit un nouveau trou (B).

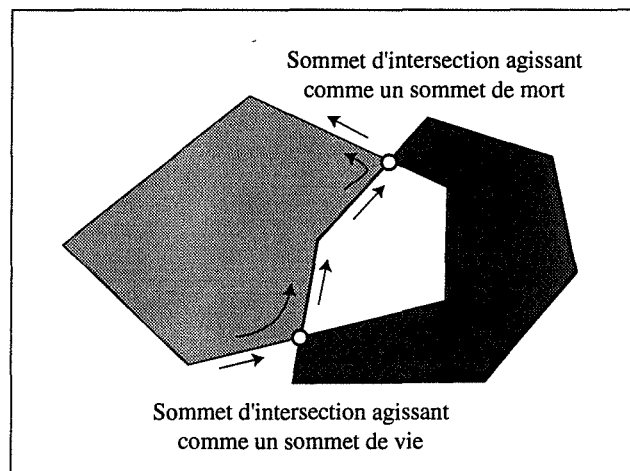
Quand, au contraire,  $e_h$  et  $e_b$  n'ont pas le même générateur, alors les deux générateurs sont fusionnés, ce qui revient à concaténer les deux chaînes liées à chacun des générateurs. Si les objets liés aux deux arêtes sont eux aussi différents, celui qui a été détecté en dernier est détruit et le générateur issu de la fusion remplace dans la liste des générateurs de l'objet l'ancien générateur. Tous les générateurs de l'objet détruit sont associés à l'autre objet. A la sortie de la procédure seul le générateur situé le plus à gauche est conservé et aucun contour n'est engendré dans ce cas de figure.

Dans les deux cas, les arêtes  $e_h$  et  $e_b$  sont enlevées du  $y$ -ordre et on teste l'intersection des deux segments qui sont maintenant adjacents sur la droite de balayage.

• *Traitement des sommets d'intersection :*

Nous ne tiendrons pas compte ici des cas dégénérés comme ceux des arêtes et des sommets confondus.

Les deux arêtes sont coupées en deux portions situées de part et d'autre de la verticale au point d'intersection. En fonction du sens de parcours des arêtes qui s'intersectent nous devons traiter deux cas. Considérons que l'arête  $e_h$  est supérieure à l'arête  $e_b$  dans le y-ordre. Alors, si le point  $P_a$ , point de jonction entre l'arête  $e_h$  et sa précédente sur la forme initiale, est à gauche de l'arête  $e_b$ , le point d'intersection agit comme un sommet de vie. Il se comporte en revanche comme un sommet de mort dans le cas contraire (cf. fig. VI.7).



**Figure VI.7 :** Influence des sommets d'intersection sur la création de nouveaux générateurs et de nouveaux objets.

Dans la première configuration il suffit de permuter au niveau de la liste d'arêtes des générateurs les deux portions d'arêtes à droite de S et de mettre à jour les objets et les générateurs pointés par ces deux nouvelles arêtes du y-ordre.

Dans le deuxième cas, et si  $e_h$  et  $e_b$  ont le même générateur, le point d'intersection S peut permettre la fermeture d'un contour. Si les conditions explicitées dans le paragraphe concernant les sommets de morts sont remplies, alors, de la même façon, une nouvelle forme différence est créée. Si en revanche, les générateurs des deux arêtes sont différents ils sont fusionnés. Quels que soient les générateurs de  $e_h$  et de  $e_b$ , les deux portions d'arêtes situées à droite de S induisent la formation d'une nouvelle chaîne associée à un nouvel objet.

Après la rencontre d'un point d'intersection et quelle que soit la configuration des arêtes il faut intervertir les deux segments dans le y-ordre. Pratiquement, chacune de ces arêtes est remplacée par la portion située à droite de S de l'autre arête. Les intersections entre l'arête basse et sa voisine inférieure, et l'arête haute et sa voisine supérieure sont ensuite testées.

### VI.1.2.3 - Présentation de l'algorithme

Le déroulement du balayage peut être schématisé par l'algorithme suivant :

- 1) *Inverser la forme SB*  
**Pour** (les deux formes SA et SB)  
**Pour** (chaque sommet de la forme)  
Déterminer le type du sommet
- 2) *Insérer le sommet dans le x-ordre dans l'ordre lexicographique*  
**Fin de Pour**  
**Fin de Pour**  
Initialiser la droite de balayage et les Objets<sup>1</sup> à vide
- Pour** (chaque sommet P du x-ordre)
  - Au cas où**
    - : P est un sommet de naissance**  
 $e_h$  et  $e_b$  sont les deux arêtes incidentes à P  
3) *Insérer  $e_h$  et  $e_b$  dans le y-ordre*  
 $e_i$  <- segment inférieur à  $e_b$   
 $e_s$  <- segment supérieur à  $e_h$   
4a)  $G$  <- *Nouveau générateur* ( $e_h$ ,  $e_b$ )  
4b) **Si** ( $(O(e_i))^2 \neq O(e_s) \vee (O(e_i) = O(e_s) \wedge G(e_i) \neq G(e_s))$ )  
 $O$  <- *Nouvel Objet* ( $G$ ,  $e_h$ ,  $e_b$ )  
**Sinon**  
 $O(e_d)$  <-  $O(e_i)$   
 $O(e_g)$  <-  $G(e_i)$   
**Fin de Si**  
6) *Tester intersection* ( $e_h$ ,  $e_s$ )  
*Tester intersection* ( $e_b$ ,  $e_i$ )
    - : P est un sommet de vie**  
 $e_g$  et  $e_d$  sont respectivement les arêtes situées à gauche et à droite de P  
*Supprimer  $e_g$  du y-ordre*  
*Insérer  $e_d$  dans le y-ordre*  
 $e_i$  <- segment inférieur à  $e_d$   
 $e_s$  <- segment supérieur à  $e_d$   
 $O(e_d)$  <-  $O(e_g)$   
 $G(e_d)$  <-  $G(e_g)$   
*Insérer  $e_d$  dans  $G(e_d)$*   
*Tester intersection* ( $e_d$ ,  $e_s$ )  
*Tester intersection* ( $e_d$ ,  $e_i$ )
    - : P est un sommet de mort**  
 $e_h$  et  $e_b$  sont les deux arêtes incidentes à P  
 $e_i$  <- segment inférieur à  $e_b$   
 $e_s$  <- segment supérieur à  $e_h$   
**Si** ( $G(e_h) = G(e_b)$ )  
**Si** ( $O(e_i) \neq O(e_s)$ )  
5) *Créer une nouvelle forme issue de O de  $e_h$*   
**Fin de Si**  
**Sinon**

<sup>1</sup> Un Objet est désigné par O et un Générateur par G

<sup>2</sup>  $O(e_i)$  et  $O(e_j)$  font respectivement référence à l'objet et au générateur de  $e_i$ .

```

4c)      G <- Fusionner les générateurs G(eh) et G(eb)
         Si (O(eh) ≠ O(eb))
4d)      O <- Fusionner les Objets O(eh) et O(eb)
         Fin de Si
         Fin de Si
         Supprimer eg et ed du y-ordre
         Tester intersection (ei, es)

: P est un point d'intersection
  eh et eb sont respectivement l'arête haute et l'arête basse qui s'intersectent
  ei <- segment inférieur à eb
  es <- segment supérieur à eh
  ehd <- portion droite de eh après avoir coupé eh
  ebd <- portion droite de eb après avoir coupé eb
  Si (P est considéré comme un sommet de vie)
4e)      Remplacer ehd par ebd dans G(eh)
         Remplacer ebd par ehd dans G(eb)
         O(ehd) <- O(eb)
         G(ehd) <- G(eb)
         O(ebd) <- O(eh)
         G(ebd) <- G(eh)

4f)      Sinon
         Oter ehd dans G(eh)
         Oter ebd dans G(eb)
         G <- Nouveau générateur (ehd, ebd)
         O <- Nouvel Objet (G, ehd, ebd)
         Si (G(eh) = G(eb))
             Si (O(ei) ≠ O(es))
                 Créer une nouvelle forme issue de O(eh)
             Fin de Si
         Sinon
             G <- Fusionner les générateurs G(eh) et G(eb)
             Si (O(eh) ≠ O(eb))
                 O <- Fusionner les Objets O(eh) et O(eb)
             Fin de Si
         Fin de Si
         Fin de Si
         Supprimer eb et eh du y-ordre
         Insérer ehd et ebd dans le y-ordre
         Tester intersection (ehd, ei)
         Tester intersection (ebd, es)

Fin de Cas
Fin de Pour

```

.....

**Fonction Tester intersection (e<sub>i</sub>, e<sub>j</sub>)**

```

Si ((ei et ej existent) ∧ (ei et ej convergent à droite))
    Si ((ei et ej s'intersectent au point I) ∧ (I n'a pas déjà été trouvé))
        Insérer le point I dans le x-ordre
    Fin de Si
Fin de Si

```

La complexité de cet algorithme est la suivante :

Soit  $n$  le nombre de sommets total de SA et de SB, et  $k$  le nombre de points d'intersection. L'étape 1 requiert  $O(n)$  opérations. Les opérations rajoutées par la recherche des formes (étapes 4a à 4f) se contentent d'effectuer une allocation mémoire et / ou un chaînage d'arêtes, de générateurs et d'objets. On peut donc considérer qu'elles sont réalisées en temps constant.

La complexité totale des étapes de création de forme est en  $O(n + k)$ .

La complexité générale de l'algorithme reste donc en  $O((n + k) \log n)$ , et en  $O(n^2 \log n)$  dans le pire des cas si le nombre  $K$  d'intersections est lui même en  $O(n^2)$ .

### VI.1.3 - Cohérence topologique du balayage, imprécisions et dégénérescences

Lors de l'utilisation d'un algorithme de balayage de type Bentley-Ottmann deux problèmes majeurs se posent :

- la gestion des imprécisions numériques,
- le traitement des cas de dégénérescences géométriques.

Ceci est d'ailleurs vrai pour la majorité des algorithmes en géométrie algorithmique. Mais dans le cas d'un balayage, le problème est plus grave puisque la plupart des erreurs se propagent au fur et à mesure du déroulement de l'algorithme, si bien que la topologie générale détectée en fin de traitement (si une erreur fatale n'est pas survenue avant !) risque d'être totalement incohérente.

Par rapport à l'algorithme général présenté dans la section précédente un gros travail d'analyse reste à faire pour identifier et traiter l'ensemble des cas de dégénérescence. Ces situations font référence aux arêtes confondues ou partiellement confondues, aux sommets confondus, aux intersections correspondant à deux ou plusieurs extrémités, etc... Elles ont des implications qui ne sont pas souvent triviales à gérer lors de la détermination des aires différences [MORE 90].

Nous contournons en partie le problème en provoquant une légère perturbation des données initiales en espérant que les cas de dégénérescence ne puissent pas se produire. Cette solution n'est qu'un palliatif permettant d'évacuer les cas les plus grossiers de dégénérescence.

Le fait même de pouvoir identifier ces situations nous ramène aux problèmes des imprécisions numériques. De nombreuses méthodes permettent de résoudre plus ou moins efficacement les problèmes de précision et de dégénérescence [MORE 90], [FOMI 91], [BEJA 93], [FOVA 93]. Une des solutions les plus simples à utiliser compte tenu de la dynamique de nos données semble être la technique de recalage sur une grille entière proposée par Michelucci [MICH 87] utilisant des pseudo-rationnels. Les calculs sont alors réalisés sur des pseudo-entiers.

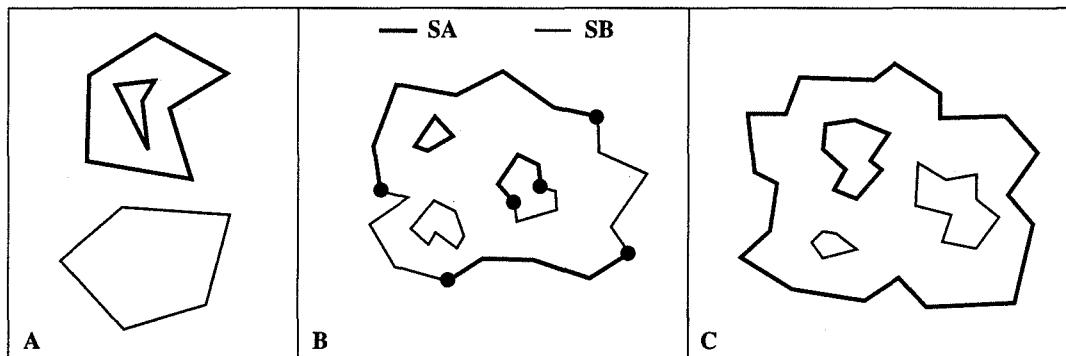
Récemment, Avnaim et al. [AVBO 94] ont proposé une méthode exacte de calcul du signe d'un déterminant d'entiers codés sur  $b$  bits en utilisant une arithmétique sur  $b$  et  $b+1$  bits. Cette approche permet de diminuer très nettement les temps moyens de calcul, et peut être utilisée dans de nombreux algorithmes de géométrie.

Toutes ces méthodes demandent pour la plupart, un lourd travail d'analyse ainsi qu'un temps non négligeable pour résoudre sérieusement l'ensemble des problèmes évoqués. Ceci dépassait largement le cadre de notre travail, c'est la raison pour laquelle nous ne les avons pas utilisées dans notre implémentation.

#### VI.1.4 - Caractéristiques des zones différences

Les zones différences extraites par la méthode présentée ci-dessus comportent toutes un seul contour externe et éventuellement plusieurs trous. En fonction des traitements qui seront effectués par la suite en vue de l'extraction des contours intermédiaires nous les partageons en trois grandes classes.

Nous parlerons souvent de formes unicolores ou bicolores. Ces attributs ont uniquement pour objet de simplifier la description des zones différences. Nous imaginons simplement que les contours des deux formes consécutives ont des couleurs différentes, par exemple rouge pour SA et bleu pour SB. Tout ceci n'ayant bien sûr aucune incidence pratique.



**Figure VI.8 :** Illustration des différents types de zones différences.

Les différentes classes de zones différences sont respectivement (cf. fig. VI.8) :

- **Les zones différences "unicolores" :** Elles ne comportent que des arêtes appartenant à une seule des formes initiales, SA ou SB (cf. fig VI.8A). Elles ne peuvent donc pas avoir de point d'intersection puisque les polygones qui composent les formes initiales sont simples. Ces formes peuvent éventuellement posséder des trous qui appartiennent toujours à la même section. Ces zones différences, souvent appelées "îles" par la suite, caractérisent des contours qui n'ont pas été mis en correspondance avec les contours de la coupe voisine.



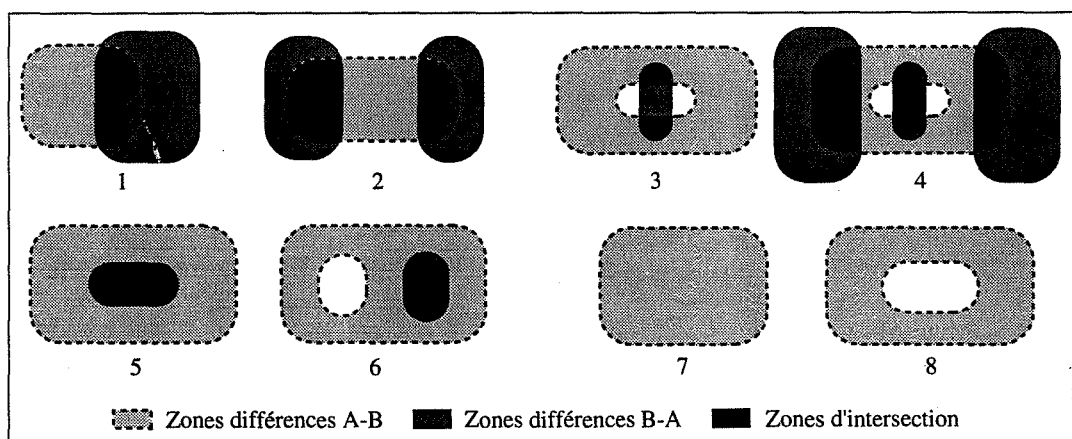
• **Les zones "bicolores intersectées"** : Ces zones différences sont composées à la fois par des arêtes qui appartiennent aux contours de la forme initiale SA et par des arêtes appartenant aux contours de la forme initiale SB. Elles ont de plus  $k$  points d'intersection (cf. fig VI.8B). Si l'on ne tient pas compte des cas particuliers, chacun de ces points relie deux zones différences bicolores intersectées consécutives de type A-B et B-A. Dans ce cas, le nombre total d'intersections est pair.

Ces zones peuvent éventuellement comporter des trous qui peuvent être soit des contours initiaux, internes ou externes, appartenant à SA et/ou à SB, soit des trous qui sont eux-mêmes le résultat de l'intersection entre des contours appartenant aux deux formes. Dans ce dernier cas, le contour externe peut ne pas résulter d'une intersection entre différents contours, et peut être un contour initial sans intersection.

Le fait de savoir si un contour est issu d'une intersection ou non, découle directement du balayage. Un champ du contour est mis à VRAI si une intersection concerne ce contour. Ceci évite de parcourir l'ensemble des formes pour détecter les points d'intersection.

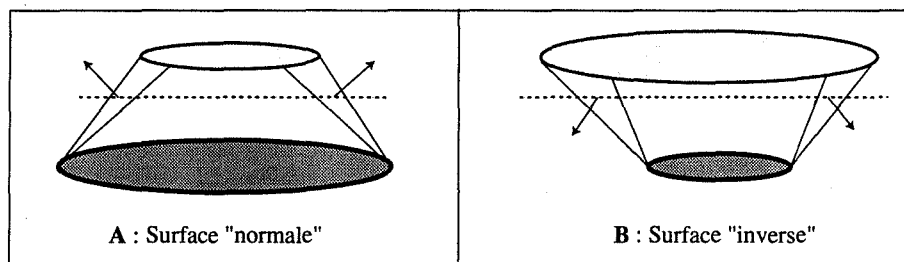
• **Les zones "bicolores non-intersectées"** : Elles ne comportent que des contours initiaux qui appartiennent à SA et à SB et qui ne résultent pas d'intersections entre contours. Il n'y a donc pas de points d'intersection (cf. fig VI.8C). Ces zones différences se différencient des zones unicolores par la présence d'au moins un trou dont l'appartenance à une section, SA ou SB, est différente de celle du contour externe.

Ces deux derniers types correspondent à des contours mis en correspondance durant la phase de projection orthogonale. De nombreuses situations qui peuvent être regroupées dans ces trois cas sont possibles et sont illustrées par la figure VI.9.



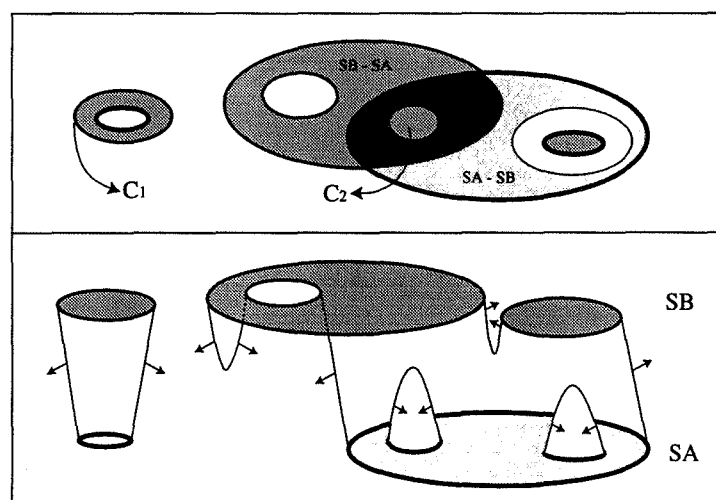
**Figure VI.9 :** Différents types de zones différences :  
zones différences intersectées simples (1), complexes (2), trouées (3, 4),  
zones différences sans intersection (5, 6), et zones unicolores simples (7) et trouées (8).

Nous pouvons aussi savoir avec l'aide de la procédure de balayage si chaque nouvelle forme est une zone d'intersection  $SA - SB$  ou  $SB - SA$ , et donc si la surface à reconstruire est de type "normale" ou "inverse". Comme toutes les normales à la surface de l'objet sont par définition orientées vers l'extérieur de l'objet, les vecteurs normaux aux surfaces dites normales sont orientés vers les  $z$  positifs, alors qu'ils sont orientés vers les  $z$  négatifs pour les surfaces dites inverses (cf. fig. VI.10). Nous verrons par la suite que cette notion a une grande importance, puisque la triangulation, effectuée sur les arêtes de chaque zone différence, se déroule si l'on peut dire "à plat", sans information sur l'orientation des contours eux-mêmes.



**Figure VI.10 :** Les différents types d'orientation de la surface.

Le type de la surface à reconstruire est normale, respectivement inverse, si la zone différence est, avec nos conventions, de type  $SA - SB$ , respectivement  $SB - SA$ . Ceci reste vrai quelle que soit l'appartenance à  $SA$  ou à  $SB$  du contour externe. Ainsi, comme l'illustre la figure suivante, une zone unicolore de type  $SB - SA$  dont le contour externe appartient à  $SB$  aura le même type inverse qu'une zone unicolore elle aussi de type  $SB - SA$ , mais dont le contour externe appartient à  $SA$ , et qui représente un trou de  $SA$  situé dans une zone d'intersection  $SA \cap SB$ .



**Figure VI.11 :** Correspondance entre le type de la zone différence et l'orientation de la surface.  
C1 et C2 sont des zones différences de même type ( $SB-SA$ ), mais dont le contour externe est d'origine différente. Dans les deux cas la surface a une orientation inverse.

## VI.2 - Construction des coupes intermédiaires

Nous avons exposé dans le chapitre III les principales étapes de notre méthode de reconstruction d'un objet 3D par triangulation. Nous avons vu que l'interpolation s'effectuait localement dans une zone différence. Ces zones étant maintenant construites, nous allons détailler les différents stades de notre approche.

Dans le chapitre III, seule la reconstruction 3D par triangulation a été évoquée. L'interpolation que nous effectuons entre deux formes permet aussi d'inférer autant de formes intermédiaires que l'on souhaite. C'est une approche qui s'apparente aux techniques d'animation où une forme origine doit être déformée en un certain nombre d'étapes pour correspondre à une forme cible. Cette technique s'applique aussi bien sur des formes 2D que sur des formes 3D. Cette méthode permet aussi de définir un objet 3D par empilement de l'ensemble des formes intermédiaires.

Bien que l'esprit et les phases d'interpolation basées sur la recherche du réseau bissecteur des formes différences soient identiques dans les deux cas, le détail des traitements et les tests d'arrêt de l'interpolation diffèrent. Notamment, la détermination de formes intermédiaires 2D nécessite d'extraire à chaque niveau d'interpolation un ensemble particulier de bissecteurs qui sont ensuite concaténés pour définir une forme intermédiaire. Cette étape n'est pas utilisée lors de la reconstruction par triangulation.

Nous avons donc choisi d'exposer les deux approches séquentiellement, en commençant par la construction de sections intermédiaires. L'exposé de la reconstruction 3D par triangulation fera l'objet du paragraphe suivant. Lorsque les phases de traitement seront identiques, nous renverrons souvent le lecteur aux procédures décrites dans les sections à venir.

Nous donnons sous forme algorithmique le déroulement général de la construction des coupes intermédiaires afin de permettre une meilleure compréhension des paragraphes à venir.

### • Algorithme général de construction de sections intermédiaires :

Si S est l'ensemble des zones différences à traiter.

**Pour** (chaque zone différence Z de S)

Supprimer Z de S

1) Construire le réseau bissecteur de Z

2) Extraire les portions de contours intermédiaires

3) Concaténer les portions de contours intermédiaires pour obtenir la section intermédiaire

**Si** (le test d'arrêt n'est pas vérifié)

**Pour** (chaque zone de S)

4) Dédire les nouvelles zones  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  issues de l'interpolation

Relancer la procédure entre la forme supérieure et les contours intermédiaires

Relancer la procédure entre les contours intermédiaires et la forme inférieure

La section VI.2.1 est consacrée au résultat de la construction du réseau bissecteur (1), tandis que l'extraction des portions de contours intermédiaires (2) et des zones intermédiaires (4) fera l'objet du paragraphe VI.2.2. La construction effective des sections intermédiaires complètes (3) est étudiée dans le paragraphe VI.2.3.

Nous verrons les différents tests d'arrêts au cours du paragraphe VI.2.4, et des résultats seront présentés dans la section VI.3.

## VI.2.1 - Squelettisation des zones différences

Le résultat de la procédure de recherche des zones différences fournit un ensemble de polygones simples éventuellement troués. Nous pouvons donc directement construire le réseau bissecteur de chacun de ces contours en utilisant les algorithmes proposés au chapitre IV.

Nous allons rapidement donner la structuration des informations en sortie de la phase de squelettisation.

Une fois que le réseau bissecteur d'une zone différence est construit, chaque arête des contours de cette zone possède une liste doublement chaînée et non vide de bissectrices. Ces bissectrices forment la frontière de la cellule du réseau bissecteur relative à l'arête considérée.

Chaque bissectrice pointe sur ses bissectrices suivante et précédente, la cellule étant parcourue dans le sens trigonométrique. Une même bissectrice est présente dans la liste des deux "arêtes mères" qui l'ont engendrée. La première et la deuxième arête mère de la bissectrice  $B(i, j)$  sont respectivement l'arête  $e_i$  et l'arête  $e_j$ . La bissectrice  $B(i, j)$  de la liste de bissectrice de  $e_i$  est appelée la "bissectrice conjuguée" de  $B(j, i)$  de la liste  $e_j$ .

De plus, toute bissectrice possède une référence sur chacune de ses deux arêtes mères. La figure VI.12 illustre ces notions.

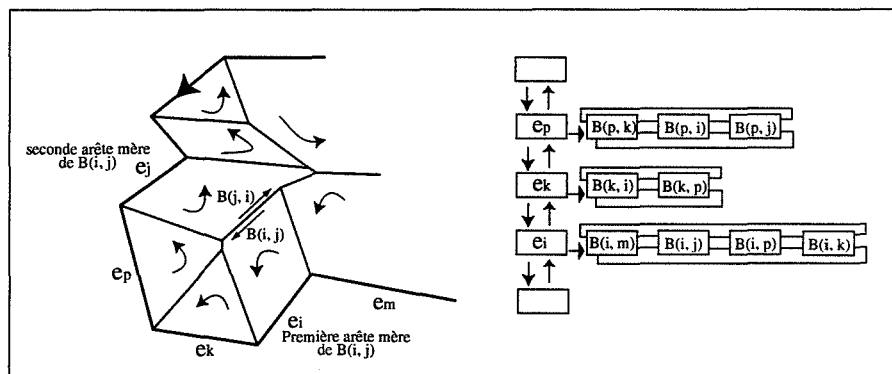
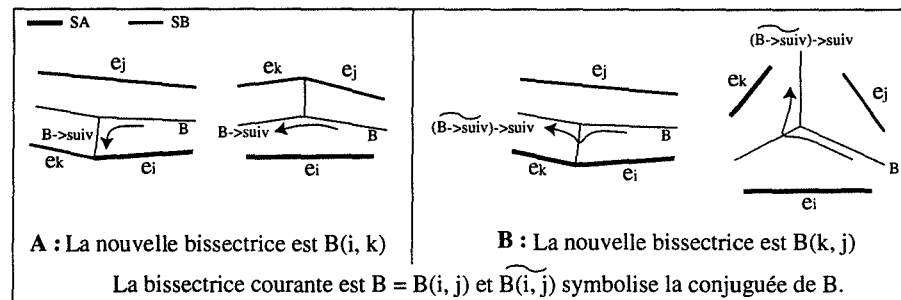


Figure VI.12 : Agencement et sens de parcours des bissectrices d'un réseau bissecteur.

Il est ainsi possible à partir d'une bissectrice quelconque d'avoir accès directement à toutes les bissectrices des cellules de ses arêtes mères. Nous pouvons ainsi nous déplacer de proche en proche à travers le réseau en empruntant toutes les bissectrices de la forme.

La figure VI.13 illustre les différents chemins que l'on peut suivre à partir d'une bissectrice courante B dont les arêtes mères appartiennent respectivement à SA et à SB :



**Figure VI.13** : Les deux types de déplacements dans le réseau bissecteur à partir des bissectrices.

Les chemins de la figure VI.13A sont trouvés en empruntant directement la bissectrice suivante de B.

Dans le cas de la figure VI.13B, il faut emprunter "la bissectrice suivante de la bissectrice conjuguée de la bissectrice suivante de B", qui est aussi "la conjuguée de la bissectrice précédente de la bissectrice conjuguée de B"! Cette bissectrice sera appelée par commodité la "bissectrice opposée" de B. L'utilisation de cette bissectrice provoque un changement de la cellule courante.

Pour trouver la bissectrice conjuguée de B, il suffit de parcourir les bissectrices de la liste de la deuxième arête mère de B jusqu'à ce que la deuxième arête mère de la bissectrice testée soit la première arête mère de B.

## VI.2.2 - Extraction des portions de contours et des zones différences intermédiaires

Après avoir déterminé les zones différences et construit le réseau bissecteur dans chacune d'elles, nous allons extraire les portions de contours intermédiaires qui correspondent en fait aux chaînes interpolées. Ces portions de contours sont les éléments qui produiront la section intermédiaire cherchée.

Si d'autres sections intermédiaires sont désirées, nous devons diviser chaque zone différence afin de pouvoir relancer de façon récursive l'interpolation dans chacune des zones différences "intermédiaires".

La construction des portions de contours intermédiaires et des zones différences intermédiaires suit la même logique, elles sont donc expliquées en même temps en fonction du type de la zone différence traitée.

A ce stade nous sommes en présence d'une zone différence munie de son réseau bissecteur. La zone différence peut être soit unicolore, soit bicolore.

Dans le cas où la zone est formée d'arêtes provenant de deux sections différentes, le but de la procédure est d'identifier et d'extraire les zones faisant référence à l'une et à l'autre des deux sections.

Si en revanche, la zone différence n'est composée que d'arêtes provenant d'une seule forme, une procédure d'érosion permet d'extraire en une seule fois l'ensemble des contours intermédiaires nécessaires. L'algorithme présenté en VI.2 ne s'applique donc pas aux zones unicolores.

#### **VI.2.2.1 - Zones bicolors**

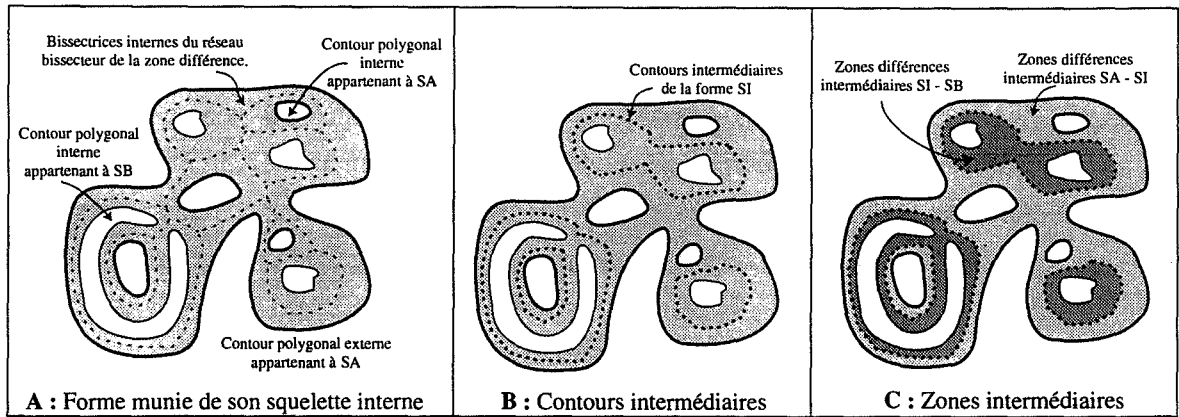
Soit une zone de différence comportant des arêtes relatives à SA et à SB.

La construction des zones différences intermédiaires consiste à extraire l'ensemble des cellules appartenant uniquement aux arêtes de SA ou à celles de SB. Les bissectrices qui sont à la fois issues d'une arête de SA et d'une arête de SB forment les arêtes de la portion du contour intermédiaire recherché.

Bien que légèrement différentes, ces deux procédures relèvent de la même stratégie.

##### ***VI.2.2.1.1 - Zones sans intersection***

Si la zone différence ne comporte pas de points d'intersection, elle est composée d'un contour externe dont toutes les arêtes sont issues de la même forme et de contours internes, chacun issu de SA ou de SB (cf. fig. VI.14A). Dans la suite, et sans perte de généralité, nous considérerons que le contour externe est issu de la forme SA.



**Figure VI.14 :** Les différentes étapes de l'interpolation dans une zone différence bicolore non-intersectée.

• *Détermination des contours interpolés*

La recherche des contours interpolés s'appuie sur le réseau bissecteur. Il s'agit d'extraire l'ensemble des bissectrices dont les arêtes mères appartiennent respectivement à SA et à SB, ou inversement. Intuitivement, cet ensemble de bissectrices correspond aux points de la zone différence qui sont à la même distance (au sens de distance cristalline - cf. Chap. IV) des arêtes de SA et de celles de SB présentes dans la zone différence.

Cette technique d'interpolation ne nécessite aucun paramétrage, ni aucune correspondance entre les points des deux contours. Elle est simplement guidée par la forme et la topologie des différents contours de la zone. De plus le résultat est unique.

L'extraction des contours intermédiaires est schématisée par l'algorithme suivant :

```

Pour (tous les contours internes C issus de la forme SB)
  Pour (toutes les arêtes A de C)
    Pour (toutes les bissectrices internes B relatives à A)
      Si (B est issue d'une arête de SA et d'une arête de SB, et si B n'est pas marquée)
        Extraire la suite des bissectrices bicolores à partir de B
      Fin de Si
    Fin de Pour
  Fin de Pour
Fin de Pour

```

L'extraction de la suite des bissectrices est réalisée grâce au schéma de déplacement expliqué au paragraphe VI.2.1.1. Le choix se faisant uniquement en fonction de l'appartenance à SB de la deuxième arête mère de la bissectrice suivante de B. En partant d'une bissectrice de départ bicolore B, on se déplace sur les bissectrices internes du réseau jusqu'à revenir sur cette même bissectrice. Remarquons ici que les bissectrices choisies au cours du déplacement sur le réseau bissecteur sont marquées ainsi que leurs deux arêtes mères afin de ne pas tester plusieurs fois la même portion de contour.

Cette procédure permet ainsi de déterminer l'ensemble des contours intermédiaires (cf. fig. VI.14B).

- *Détermination des zones différences intermédiaires*

La détermination des zones liées à SA et de celles liées à SB va bien évidemment utiliser les contours extraits dans l'étape ci-dessus. En fait, on recherche l'ensemble des zones connexes de cellules relatives à une même forme. Comme une bissectrice est commune à deux cellules, chaque bissectrice interne bicolore appartient à deux zones intermédiaires d'appartenance différente. Il est donc nécessaire de dupliquer les contours intermédiaires trouvés précédemment, et d'arranger les différentes zones suivant le schéma classique : un contour externe et des contours internes.

Dans notre exemple (où le contour externe est censé appartenir à SB), certains contours intermédiaires deviendront des trous supplémentaires du contour externe pour les zones liées à SB, tandis que d'autres seront des contours externes incluant un certain nombre de contours internes issus de SB. A l'inverse, les mêmes contours intermédiaires serviront de contours internes ou externes pour SA s'ils sont respectivement contours externes et internes pour SB (cf. fig. VI.14C).

Cette hiérarchisation peut être déterminée par le seul sens de parcours des différents contours intermédiaires. Les contours intermédiaires issus des arêtes de SB et orientés CCW seront des contours internes des zones liées à SA. Inversement, les contours intermédiaires orientés CW deviendront des contours externes pour les zones liées à SA.

A ce stade il ne reste plus qu'à regrouper les différents contours internes avec leur contour externe, et ce pour les deux zones de différences intermédiaires.

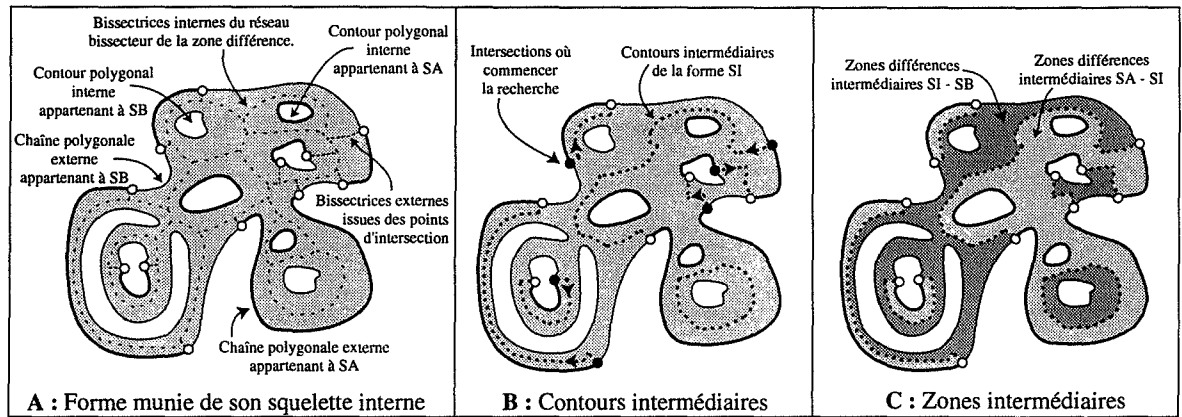
Ceci est effectué par la procédure classique de classement des boîtes englobantes des différents contours. Pour ce faire, les contours intermédiaires sont triés selon l'abscisse minimale de leur boîte englobante. Le premier contour C (celui dont l'abscisse est minimale) est de fait un contour interne. Nous testons tous les contours dont la boîte englobante est entièrement incluse dans celle de C afin de vérifier si ce sont effectivement des contours internes de C, en ayant à l'esprit qu'un contour inclus dans un contour interne n'est pas un trou. Les contours internes déterminés sont retirés de la liste, et le processus continue avec le contour externe suivant.

Nous obtenons deux lots de zones différences intermédiaires : les zones comportant des arêtes issues de SA et de l'interpolation entre SA et SB, que nous appellerons SI, et des zones dont les arêtes proviennent des formes SB et SI. Une nouvelle interpolation pourra être effectuée ensuite dans ces deux types de zones.



### VI.2.2.1.2 - Zones avec intersections

Ces zones comportent un nombre pair d'intersections. Elles sont composées d'un contour externe et éventuellement de contours internes, chacun de ces contours pouvant comporter un nombre quelconque de points d'intersection (cf. fig. VI.15A).



**Figure VI.15 :** Les différentes étapes de l'interpolation dans une zone différence bicolore intersectée. La forme générale est la même que celle de la figure VI.14, ce qui permet de comparer les résultats.

#### • Détermination des contours interpolés

Dans cette situation, l'extraction des contours intermédiaires comporte deux étapes qui sont l'extraction des portions de contours ouverts issus des points d'intersection (les chaînes intermédiaires), et celle des contours intermédiaires fermés liés aux éventuels trous de la forme.

La détermination des arêtes intermédiaires suit la même philosophie que celle explicitée ci-dessus. Il s'agit toujours des bissectrices bicolores du réseau bissecteur.

Nous allons tout d'abord extraire les portions de contours ouverts qui sont par définition liés aux différents points d'intersection de la forme. Pour ce faire, nous parcourons l'ensemble des contours intersectés afin de déterminer les arêtes consécutives issues de deux formes initiales différentes. A partir de la bissectrice externe issue de chacun de ces points nous construisons la suite de bissectrices bicolores en parcourant les bissectrices du réseau suivant le même schéma que ci-dessus. Notons que seuls sont retenus comme points de départ les sommets dont les arêtes précédentes et suivantes appartiennent par exemple respectivement à SA et à SB (cf. fig. VI.15B). Ceci afin de ne pas dupliquer inutilement chacune des chaînes.

L'algorithme suivant schématise notre démarche :

```

Pour (tous les contours C issus d'une intersection)
    Empiler les points d'intersection de type SA-SB
Fin de Pour
Pour (tous les points d'intersection trouvés précédemment)
    /* l'arête A est issue de la forme SA et l'arête suivante est issue de la forme SB)
    /* B est la bissectrice issue du sommet extrémité de A */
    Extraire la suite des bissectrices bicolores à partir de B
Fin de Pour

```

Cet algorithme fournit un ensemble de chaînes intermédiaires chacune limitée par deux points d'intersection.

Il nous reste maintenant à extraire les contours intermédiaires fermés. Afin de ne pas commencer à extraire des bissectrices déjà utilisées par les contours intermédiaires, nous avons marqué chacune de ces bissectrices à l'étape précédente.

Nous utilisons la même procédure que celle proposée pour les zones sans intersections, en parcourant cette fois uniquement les contours sans intersections. Ici tous les contours, quelle que soit leur appartenance à SA ou à SB, doivent être vérifiés, sauf si le contour externe n'est pas lui-même intersecté.

#### • *Détermination des zones différences intermédiaires*

L'extraction des zones intermédiaires s'effectue de manière similaire. Comme cette fois nous devons intégrer les chaînes intermédiaires et les portions de contours appartenant à SA et à SB, nous recherchons dans un premier temps tous les sommets d'intersection d'où sont issues les bissectrices externes bicolores.

En partant du premier de ces points nous déterminons les bissectrices bicolores jusqu'à arriver à un autre point d'intersection. Nous agglomérons ensuite les arêtes du contour initial tant qu'un nouveau point d'intersection n'est pas rencontré à nouveau le long de ce contour. Ce point d'intersection est alors supprimé de la liste. Cette procédure se poursuit jusqu'à retomber sur le point d'intersection initial.

Cette extraction se déroule à la fois pour les points d'intersection de type SA-SB et pour ceux de type SB-SA. Ceci nous permet d'extraire les zones intermédiaires intersectées liées à SA et à SB (cf. fig. VI.15C).

La seconde étape consiste à extraire les zones intermédiaires uniquement délimitées par des contours intermédiaires fermés. Nous utilisons de nouveau la même procédure que celle utilisée dans le paragraphe précédent.

La phase finale permet de reconstituer un certain nombre de zones, chacune constituée d'un contour interne et d'éventuels contours externes. Ces zones sont de type SA-SI et de type SI-SB. L'interpolation est alors relancée dans chacune de ces zones.

Notons que l'interpolation dans une zone différence intersectée produit de nouvelles zones différences intermédiaires intersectées, et d'autres non intersectées. Sur ces dernières nous devons appliquer la procédure décrite au paragraphe VI.2.2.1.1.

### VI.2.2.2 - Zones unicolores

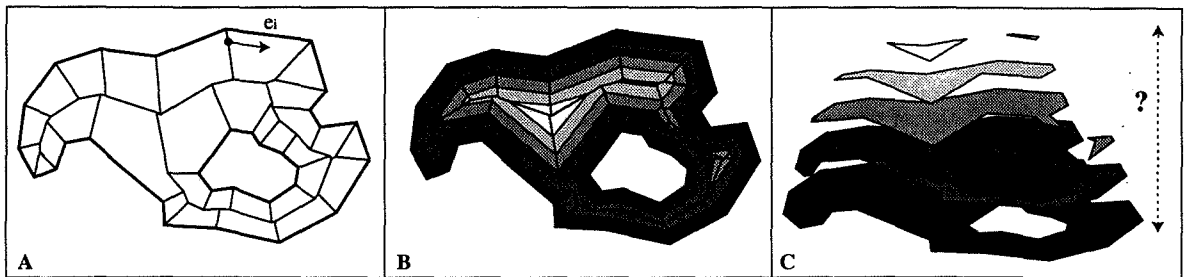
L'interpolation dans les zones unicolores ne procède pas de la même logique que celle dans les zones bicolores, car il s'agit ici de contours qui n'ont pas de correspondants dans la section voisine.

Ces objets correspondent à des volumes qui disparaissent progressivement en se rapprochant de l'autre section. Ceci revient en fait à mettre en correspondance un contour avec un point situé sur la section voisine.

Plutôt que de faire disparaître la forme par une série d'homothétie, ce qui ne rendrait pas compte de la morphologie du contour, nous privilégions les zones les plus importantes du contour en faisant l'hypothèse que ce sont elles qui doivent disparaître en dernier. Un tel modèle est à rapprocher de la notion d'érosion comme on la conçoit en morphologie mathématique.

Suivant notre critère de distance cristalline, l'érosion s'assimile à la construction des contours parallèles à partir du réseau bissecteur. Dans notre cas l'érodé ultime est le dernier point de rupture final rencontré durant la "croissance" du contour (cf. Chap. IV), et il correspond au point virtuel de l'autre section avec lequel le contour est mis en correspondance.

Cette stratégie peut s'appliquer aussi bien pour la construction de sections intermédiaires que lors d'une reconstruction 3D directe de la forme, mais nous verrons dans le paragraphe VI.3.4 que l'algorithme gérant la reconstruction est beaucoup plus simple.



**Figure VI.16 :** Interpolation dans une zone unicolore lors de la construction des zones intermédiaires.

L'algorithme utilisé ici consiste à tracer l'ensemble des arêtes parallèles à une distance  $h$  du contour initial.

On choisit tout d'abord dans la liste des bissectrices d'une arête  $e_i$ , une bissectrice dont un des points est à une distance  $h$  de  $e_i$ . Ce point est le premier sommet du contour parallèle. Le second point est trouvé en parcourant le reste des bissectrices de la cellule courante. Ce deuxième point est situé sur une bissectrice  $B(i, j)$ . Une première arête parallèle peut alors être construite. On recherche ensuite un deuxième point dans les bissectrices de la cellule  $V(j)$  permettant de tracer une arête parallèle à la distance  $h$  de  $e_j$ . Le processus se poursuit ainsi jusqu'à revenir au point de départ initial.

La procédure nécessite de tester l'ensemble des arêtes de tous les contours afin d'être certain de n'oublier aucun contour parallèle. En effet, pour certaines valeurs de  $h$  la forme parallèle n'est plus connexe (cf. fig. VI.16 contours parallèles 2 et 4).

Ce processus est répété pour l'ensemble des contours parallèles désirés (cf. fig. VI.16).

Nous voyons que deux aspects de l'interpolation restent en suspend, à savoir la position en  $Z$  de la dernière section intermédiaire et la détermination du test d'arrêt de l'interpolation. Le choix de la distance  $h$  précédemment utilisée est aussi fonction du test d'arrêt.

Toutes ces questions seront abordées dans les paragraphes suivants.

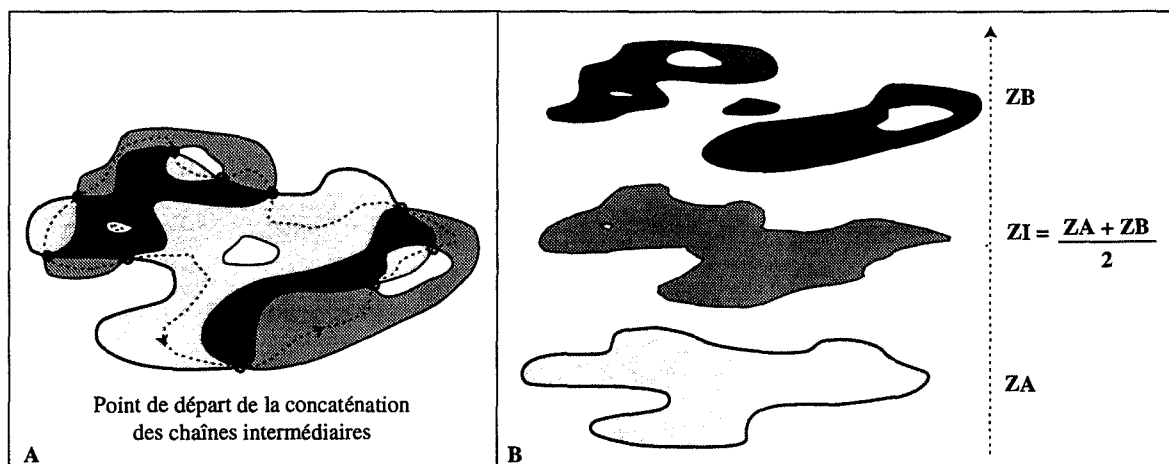
### VI.2.3 - Construction effective des sections intermédiaires

Ce court paragraphe s'intègre uniquement dans le cadre de l'interpolation entre deux formes 2D ou 3D avec construction de formes ou de sections intermédiaires.

Nous rappelons que lors de reconstruction 3D par facettes nous n'avons pas besoin de déterminer effectivement les sections intermédiaires. Un traitement au niveau des zones différences suffit.

Le résultat de l'interpolation fournit des contours intermédiaires (fermés) et des chaînes intermédiaires (ouvertes). Il s'agit donc maintenant de concaténer l'ensemble des chaînes, et de déterminer les contours internes et les trous.

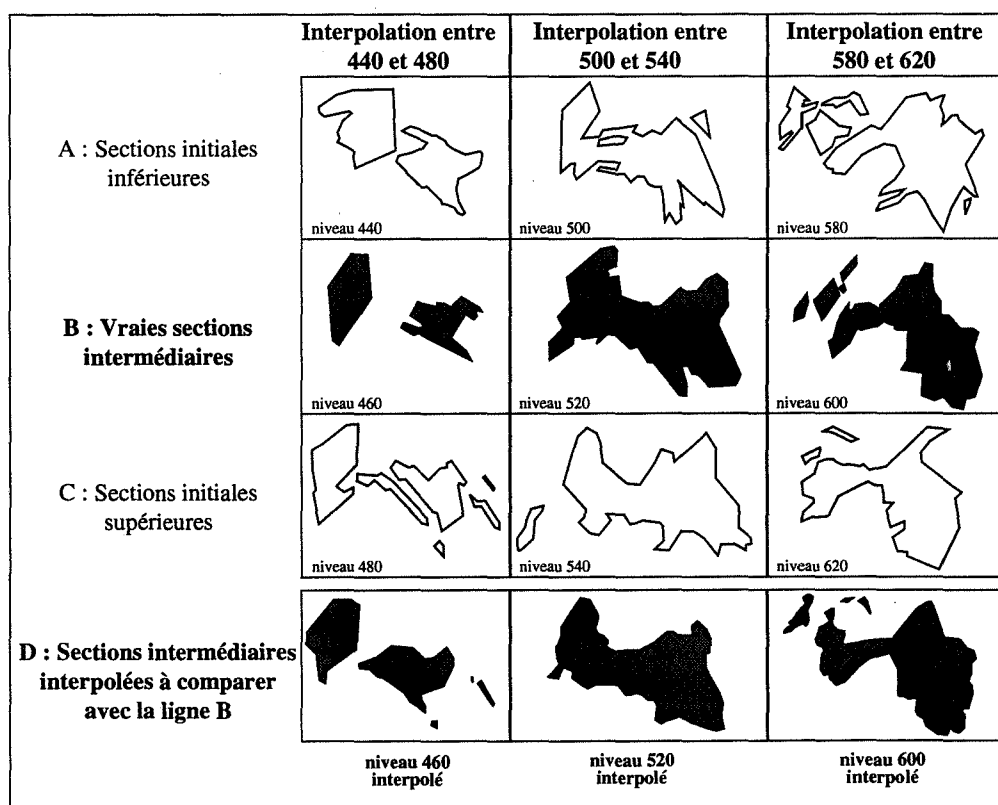
L'ensemble des chaînes a été conservé en mémoire, et leurs points d'extrémité sont les points d'intersection entre les formes. Il suffit simplement, en partant d'une chaîne initiale, de concaténer les différentes chaînes bout à bout jusqu'à fermer complètement le contour. On continue ainsi tant qu'il existe des chaînes non connectées (cf. fig. VI.17A).



**Figure VI.17 :** Concaténation de l'ensemble des chaînes et des contours intermédiaires interpolés. Positionnement en Z de la forme SI intermédiaire.

A la fin de cette procédure, nous devons déterminer la forme intermédiaire finale en agençant les contours externes avec leurs contours internes respectifs. Nous utilisons pour cela la procédure décrite à la section VI.2.2.1.1.

Notons que chaque fois qu'une coupe intermédiaire SI est calculée entre deux coupes SA et SB, respectivement situées aux altitudes ZA et ZB, elle est insérée à l'altitude  $ZI = \frac{ZB + ZA}{2}$  (cf. fig. VI.17B).



**Figure VI.18 :** Test permettant de comparer de vraies sections initiales (ligne B) avec des sections intermédiaires interpolées (ligne D) à partir des deux coupes extrêmes (ligne A et C).

La figure VI.18 montre trois séries de tests réalisés sur les sections de la mine de Hajar au Maroc. Il s'agissait de tester visuellement la validité de l'interpolation conduisant à la création d'une section intermédiaire. Nous avons donc sélectionné 3 coupes consécutives (A, B, C) et nous avons lancé l'interpolation entre les deux coupes extrêmes. Le résultat, la coupe intermédiaire interpolée (D), est à comparer avec la section intermédiaire initiale (B).

Ce test n'a pas valeur de preuve ni de démonstration, il permet simplement de visualiser un résultat qui d'après nous, et au vu des sections initiales, n'est pas mauvais.

## VI.2.4 - Tests d'arrêt de la construction des sections intermédiaires

Notre méthode d'interpolation est un processus récursif qui peut être soit interrompu en fonction du désir de l'utilisateur, soit en fonction de la configuration des formes. Il en résulte deux types de critères que nous allons maintenant présenter.

### VI.2.4.1 - Tests d'arrêt dictés par l'utilisateur

Il s'agit de tests d'arrêt globaux qui n'ont a priori aucun rapport avec la morphologie et la topologie des sections.

Il s'agit essentiellement de fixer :

- Un nombre maximum de coupes,
- Une distance inter-coupes minimale

Le processus étant récursif, si nous voulons que chacune des coupes intermédiaires soit située à une hauteur intermédiaire entre les deux formes initiales, le nombre  $N$  de coupes autorisé est donné par  $N = \sum_{R=0}^{n-1} 2^R$ , où  $n$  est le niveau de récursion souhaité. Ceci autorise donc 1, 3, 7, 15, etc... coupes intermédiaires (cf. fig. VI.19).

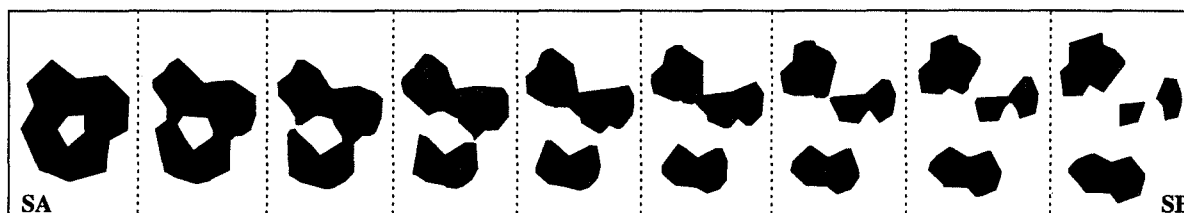


Figure VI.19 : Exemple d'interpolation de 7 coupes entre deux sections initiales.

Si la distance inter-coupe  $D_{\min}$  est fixée, nous n'effectuons une interpolation que si

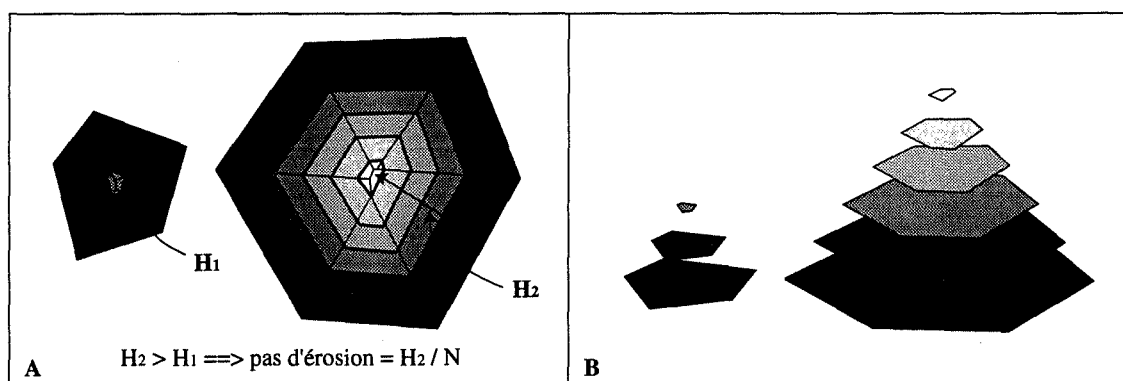
$$\frac{ZB - ZA}{2} < D_{\min}$$

Dans le cas du traitement des formes différences unicolores nous devons décider du nombre de sections que nous construisons. En effet le nombre de sections dépend du pas d'érosion choisi, ainsi que de la distance au contour du point érodé final.

Si  $D_{\max}$  est la distance du point érodé final, le pas d'érosion est donné par  $D_{\min}/N$ . Ceci permet de construire  $N$  coupes sur chaque contour.

L'expérience nous a montré qu'il était préférable de corrélérer l'ensemble des formes unicolores afin de tenir compte de l'aire initiale de chacun des contours. Ceci permet en particulier de ne construire que quelques contours intermédiaires à partir de formes très petites, alors que l'on construira la totalité des formes intermédiaires pour des formes ayant un empiètement beaucoup plus grand.

Pour intégrer les deux types de tests, nous ne lançons l'interpolation des formes différences unicolores qu'à la fin du traitement des autres aires différences.

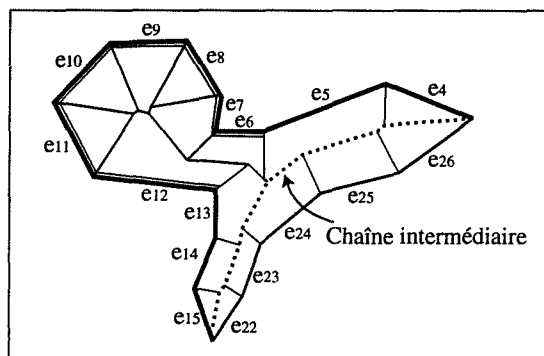


**Figure VI.20 :** Interpolation globale des zones différences unicolores. Cela permet de contrôler la hauteur de l'objet en fonction de son empiètement.

Parmi tous les érodés finaux, nous choisissons celui dont la distance à son contour respectif est la plus grande (cf. fig. VI.20A). Dans le cas où c'est la distance minimale qui est fixée, l'interpolation des formes différences bicolores nous fournit le nombre de coupes effectivement réalisées. Nous calculons ensuite le pas d'interpolation qui sera appliqué sur l'ensemble des formes. Ceci nous permet de réaliser une interpolation plus harmonieuse qui dépend uniquement de la morphologie des contours (cf. fig. VI.20B).

### VI.2.4.2 - Tests d'arrêt fonction de la morphologie des contours

Il apparaît que le choix des critères d'arrêt décrits ci-dessus est totalement empirique. Il était donc intéressant de chercher un test qui soit plus ou moins dicté par les données elles-mêmes. Comme ce test est aussi basé sur le réseau bissecteur, nous allons introduire la notion de "segment ou d'arête homologue".



**Figure VI.21 :** Les arêtes  $e_6, e_7, \dots, e_{12}$  n'ont pas de segments homologues sur la chaîne intermédiaire. Une nouvelle interpolation peut être imaginée entre la chaîne intermédiaire et la portion de contour comportant les arêtes  $e_4 - e_{15}$ .

Nous sommes en présence d'une zone différence bicolore munie de son réseau bissecteur, de ses chaînes intermédiaires, et éventuellement de ses contours intermédiaires. Une arête  $e_i$  du contour initial possède un segment homologue sur les portions de contours intermédiaires si au moins une bissectrice de  $V(i)$  appartient à ces portions de contours intermédiaires.

Intuitivement, si le ou les contours initiaux d'une zone différence comporte(ent) des arêtes qui n'ont pas de segments homologues, c'est que la forme est relativement complexe et que l'interpolation n'a pas pu s'introduire dans toutes les excroissances. Il faut donc a priori relancer l'interpolation dans les zones différences intermédiaires afin de "coller" au mieux aux deux sections d'origine. Bien évidemment, on peut fixer un petit nombre d'arêtes en dessous duquel on décide de ne pas relancer l'interpolation.

Ce test dépend donc uniquement de la complexité des zones différences. Il est intéressant par le fait que des sections très similaires produiront un faible nombre de coupes intermédiaires, alors que pour des formes qui ont de fortes variations de morphologie le nombre de sections intermédiaires sera augmenté. Ceci permet d'augmenter les détails et d'affiner la représentation.

Nous verrons que ce test est beaucoup plus intéressant à utiliser pour une reconstruction 3D par triangulation, car dans ce cas nous ne sommes pas obligés de construire en totalité toutes les sections, mais nous pouvons accroître la définition uniquement dans les zones différences complexes.



## VI.3 - Triangulation des zones différences

Nous l'avons vu, la section précédente est uniquement consacrée à l'interpolation des zones différences en vue de la construction de sections intermédiaires.

Dans cette section nous allons nous intéresser à la reconstruction d'un objet par triangulation. Notre approche et ses principales étapes sont exposées au chapitre III. L'algorithme qui suit en rappelle les différents stades.

### • Reconstruction 3D par triangulation :

Si S est l'ensemble des zones différences à traiter.

```

Pour (chaque zone différence Z de S)
  Supprimer Z de S
  1) Construire le réseau bissecteur de Z
    Si (le test est global)
      Si (le test d'arrêt est vérifié)
        3) Trianguler les nouvelles zones
      Sinon
        2) Déduire les nouvelles zones Z1, Z2,..., Zn issues de l'interpolation de Z
           Ajouter les nouvelles zones à l'ensemble S
      Fin de Si
    Sinon /* le test est local */
      Si (le test d'arrêt est vérifié pour Z)
        3) Trianguler la zone Z
      Sinon
        2) Déduire les nouvelles zones Z1, Z2,..., Zn issues de l'interpolation de Z
           Ajouter Zi à l'ensemble S
      Fin de Si
    Fin de Si
  Fin de Pour

```

A l'inverse de la construction de sections intermédiaires, la reconstruction 3D ne nécessite pas l'extraction des contours intermédiaires ni la concaténation de ces contours. Tout se passe ici à l'intérieur des zones différences et les traitements sont réalisés indépendamment les uns des autres.

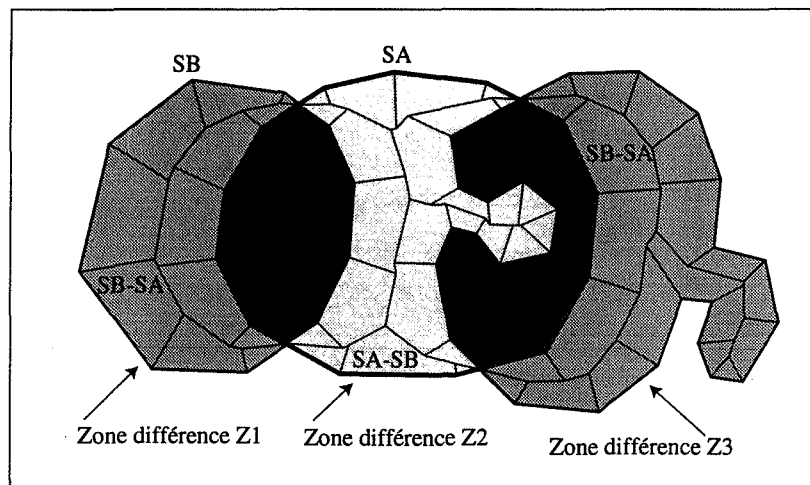
Les zones différences unicolores nécessitent un traitement simplifié qui ne rentre pas dans le cadre de cet algorithme. Un paragraphe sera consacré à leur reconstruction.

### VI.3.1 - Triangulation d'une zone différence bicolore non trouée

Nous sommes à ce stade en présence d'une zone différence  $Z$  dont nous avons construit le réseau bissecteur (cf. § VI.2.1).

Si le test d'arrêt n'est pas vérifié, nous devons construire les zones différences intermédiaires  $Z1, Z2, \dots, Zn$  relatives à  $Z$ , et relancer l'interpolation dans chacune d'elles (cf. § VI.2).

Si au contraire le test d'arrêt est vérifié, nous pouvons procéder à la triangulation de la zone différence  $Z$ . Nous nous plaçons ici dans ce cas de figure.



**Figure VI.22 :** Résultat de la squelettisation des 3 zones différences de deux formes SA et SB.

La figure VI.22 illustre les trois zones différences munies de leur réseau bissecteur qui sont engendrées par deux formes SA et SB. Ces trois zones différences sont bicolores et intersectées (cf. § VI.2.2.1.1), elles seront nommées de gauche à droite  $Z1, Z2, Z3$ .

Nous allons détailler la triangulation des deux zones différences  $Z1$  et  $Z2$ .

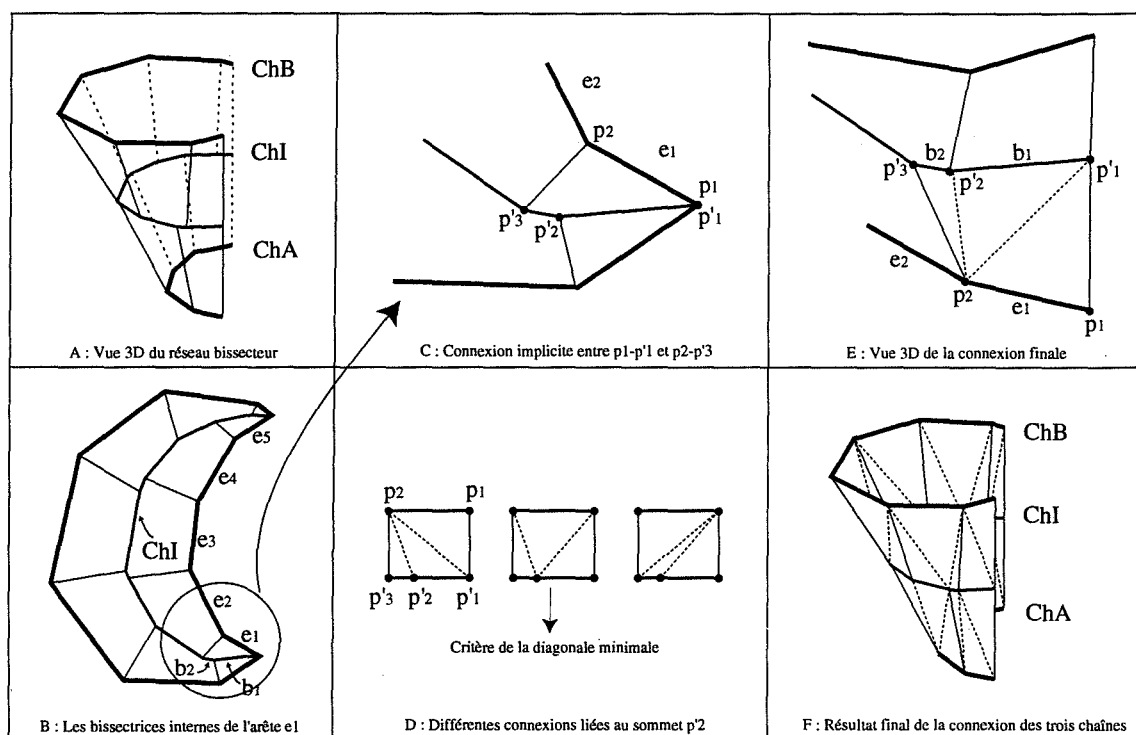
#### VI.3.1.1 - Triangulation d'une zone différence "simple"

$Z1$  est une zone différence de type B-A composée uniquement de deux portions de contours  $ChA$  et  $ChB$  appartenant respectivement à la section SA et SB. Nous appelons  $ChI$  la chaîne composée des bissectrices du réseau bissecteur dont les deux arêtes mères appartiennent respectivement aux deux formes SA et SB. Cette chaîne est pour l'instant virtuelle car elle n'est pas encore individualisée, toutes les bissectrices qui la composent étant encore incluses dans le réseau bissecteur de  $Z$ .

La procédure de triangulation consiste à relier par un maillage triangulaire la portion de contour ChA avec la chaîne intermédiaire ChI d'une part, et la portion de contour ChB avec la chaîne intermédiaire ChI d'autre part.

Nous allons d'abord nous focaliser essentiellement sur la triangulation des chaînes ChA et ChI.

Comme ChI est une chaîne intermédiaire, tous ses points sont à une altitude  $ZI = \frac{ZB + ZA}{2}$ . La figure VI.23A illustre la position des trois chaînes ChA, ChI, ChB en fonction de leur altitude respective.



**Figure VI.23** : Les différentes étapes de la triangulation de la zone différence  $Z1$  de la figure VI.22.

Pour trianguler ChA et ChI, il suffit de trianguler tous les segments de ChA avec ceux de ChI en tenant compte d'un critère donné, par exemple une notion de distance entre les arêtes. Dans notre cas, nous devons remarquer que la première arête  $e1$  de ChA est l'arête mère des bissectrices  $b1$  et  $b2$  de ChI. Ces deux bissectrices délimitent la zone des points qui sont plus proches de  $e1$  au sens de la distance cristalline (cf. Chap. IV) que de toutes les autres arêtes de Z. Ceci permet de déterminer immédiatement quelles sont les bissectrices à trianguler avec  $e1$  (cf. fig. VI.23B). Le fait de savoir que  $b1$  et  $b2$  doivent être triangulées avec  $e1$  est donc directement lié au fait que  $b1$  et  $b2$  sont toutes deux des bissectrices internes bicolores de  $e1$ .

D'autre part, nous savons que les points extrémités  $p_1$  et  $p_2$  de l'arête  $e_1$  sont respectivement connectés avec les extrémités  $p'_1$  et  $p'_3$  des bissectrices  $b_1$  et  $b_2$  (cf. fig. VI.23C). Il nous reste à savoir comment terminer le maillage en définissant les connexions avec  $p'_2$  qui permettront de créer les trois triangles nécessaires. Nous avons opté pour le critère classique et simple du calcul de la diagonale la plus courte (cf. fig. VI.23D).

La triangulation finale de  $e_1$  avec ses bissectrices  $b_1$  et  $b_2$  aboutit dans notre exemple à la création des triangles  $(p_1, p'_2, p'_1)$ ,  $(p_1, p_2, p'_2)$ ,  $(p_2, p'_3, p'_2)$  (cf. fig. VI.23E).

Toutes les arêtes de ChA sont ainsi triangulées avec leurs bissectrices respectives situées sur la chaîne intermédiaire ChI. Le même traitement est réalisé avec les arêtes de ChB (cf. fig. VI.23F).

Notons que l'orientation des normales issues des triangles (et donc le sens de parcours de ces triangles) est toujours le même quelle que soit la chaîne ChA ou ChB traitée. Le type de la zone différence (ici SB-SA) nous oblige à inverser l'ensemble de ces sens de parcours afin que l'orientation des normales soit cohérente sur l'ensemble de la surface. Ceci garantit que toutes les normales soient bien orientées vers l'extérieur de l'objet.

### VI.3.1.2 - Triangulation d'une zone différence "complexe"

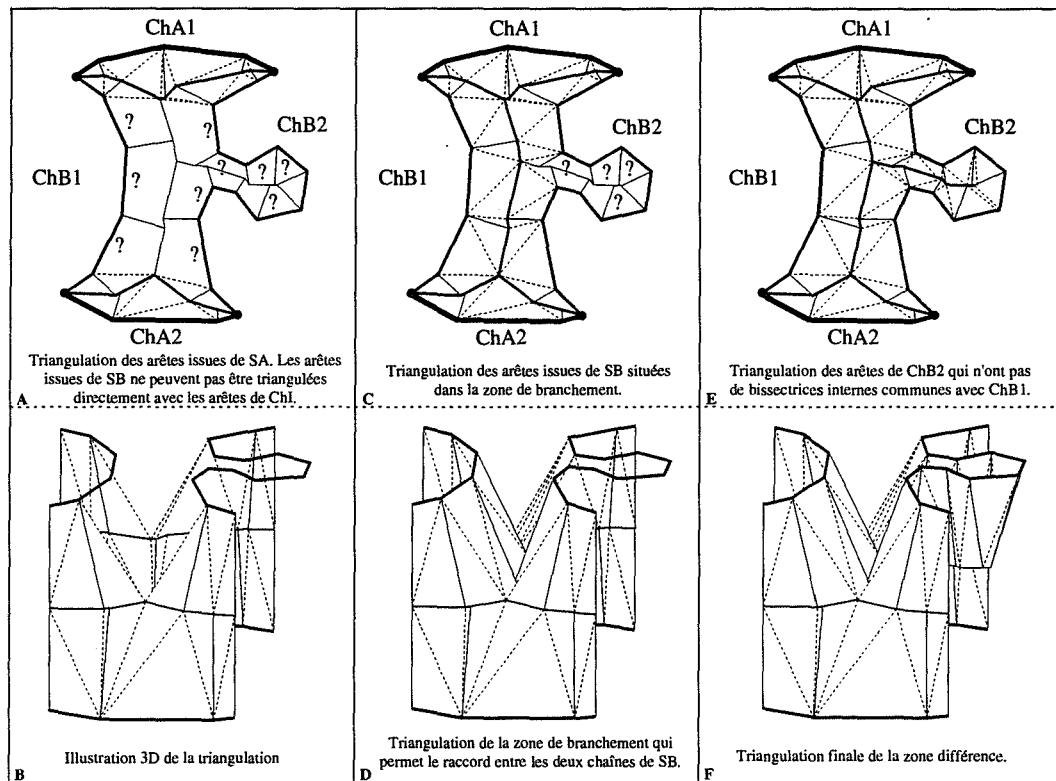
Z2 est une zone différence "complexe" dans le sens où elle se compose de plus de deux chaînes. Elle est composée de quatre portions de contours, les chaînes ChA1, ChA2 appartenant à la section SA, et les deux chaînes ChB1 et ChB2 appartenant à la section SB. Nous appelons ChI1 et ChI2, les deux chaînes intermédiaires composées des bissectrices du réseau bissecteur dont les deux arêtes mères appartiennent respectivement aux deux formes SA et SB. Comme précédemment ces chaînes sont seulement définies de façon implicite.

Nous voyons sur la figure VI.24A que les deux chaînes ChA1 et ChA2 peuvent être triangulées avec ChI1 et ChI2 en appliquant la même technique que précédemment. La zone différence étant cette fois de type SA-SB, les normales sont bien orientées dès la phase de triangulation. La figure VI.24B montre le résultat 3D de la triangulation de ces deux chaînes.

Pour ce qui est des deux chaînes issues de la forme SB, la même procédure ne peut s'appliquer directement car dans la zone centrale, correspondant ici à une zone de branchement, certaines arêtes de ChB1 et de ChB2 ne possèdent pas de bissectrices sur les chaînes intermédiaires ChI1 et ChI2.

En reprenant la terminologie du paragraphe VI.2.4.1 ces arêtes n'ont pas de segments homologues sur ChI1 et ChI2. Si l'on revient à la notion de réseau bissecteur et de distance

cristalline, cela signifie que ces arêtes sont face à face avec d'autres arêtes elles-mêmes issues de la forme SB, et donc plus près de ces arêtes que de celles appartenant à SA. Ceci est symptomatique de zones de branchements, ou de zones à fortes variations morphologiques entre les contours de deux formes au sein d'une même zone différence.



**Figure VI.24 :** Les différentes étapes de la triangulation d'une zone différence bicolore "complexe".

Dans le cas de zones de branchements, la situation qui vient d'être décrite implique de trouver un moyen de connexion des arêtes des deux chaînes ChB1 et ChB2 qui n'ont pas d'homologue sur les chaînes intermédiaires. Les bissectrices internes unicolores dont les arêtes mères appartiennent respectivement à ChB1 et à ChB2 permettent de connecter les arêtes de ces deux chaînes qui participent à la zone de branchement. Il suffit de parcourir les arêtes d'une des chaînes, ChB1 par exemple, pour à la fois déterminer les bissectrices internes impliquées ainsi que les arêtes relatives de ChB2. Les bissectrices internes unicolores ayant deux arêtes mères sur des chaînes de même provenance (SB par exemple) peuvent être considérées alors comme appartenant elles aussi à la chaîne intermédiaire. Ces bissectrices, situées à l'altitude ZI, permettent d'effectuer une connexion entre les deux chaînes ChB1 et ChB2 en conservant la continuité de la surface dans la zone de branchement (cf. fig. VI.24C). La phase de triangulation est identique à celle présentée dans le paragraphe précédent (cf. fig. VI.24D).

Cette technique est directe et ne souffre d'aucune exception.

Il nous reste à traiter le cas des arêtes qui n'ont pas d'homologues et qui ne participent pas à une zone de branchement. Il s'agit des arêtes situées dans des aires de fortes variations morphologiques. Ces arêtes sont connectées par le biais de leurs bissectrices internes unicolores à d'autres arêtes de la même chaîne.

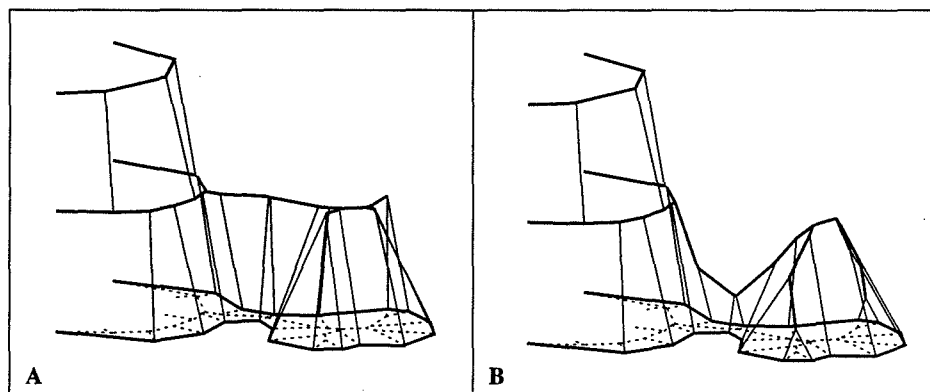
Une solution consisterait à relier toutes ces arêtes avec le point de jonction triple T entre la branche de bissectrice interne liée à ces arêtes et la branche de bissectrice interne, bi ou unicolore, la plus proche. Cette technique ne peut s'appliquer que dans les cas simples (cf. § VI.3.5.2). Dans les cas plus complexes, elle peut induire une auto-intersection de la surface triangulée.

Nous avons choisi de mettre en œuvre une méthode qui s'appuie directement sur les principes énoncés plus haut et qui permet de garantir l'hypothèse selon laquelle la triangulation est entièrement contenue par projection orthogonale dans la zone différence (cf. Chap. III). Ceci permet d'éviter, dans tous les cas, les problèmes d'auto-intersection de la surface triangulée.

Elle est fondée sur le principe qu'une zone de forte variation morphologique au sein d'une aire différence est le résultat de la déformation d'un seul des deux contours. Plutôt que de rechercher une connexion entre les deux contours à tout prix, il est alors préférable de connecter les arêtes de la chaîne déformée indépendamment de celles du contour qui ne l'est pas.

Pratiquement, chaque arête qui n'a pas d'homologue sur la chaîne intermédiaire, et qui n'est pas connectée par le biais de ses bissectrices internes à une arête de même provenance, mais appartenant à une chaîne différente, est triangulée avec ses bissectrices internes (cf. fig. VI.24E). Le critère de la triangulation reste celui de la diagonale la plus courte (cf. fig. VI.24F).

Notons que cette méthode s'applique bien évidemment à tous les cas de variations locales de morphologie, aussi bien des invaginations que des protubérances comme dans le cas de la zone différence Z3.



**Figure VI.25 :** La reconstruction de la figure B permet de mieux prendre en compte la physionomie du contour.

Il est toutefois possible d'imaginer de ne pas positionner tous les sommets de la portion de chaîne intermédiaire unicolore à la même altitude. A l'inverse de la figure VI.25A, la figure VI.25B montre le résultat du positionnement des sommets en fonction de leur distance relative au contour sur le réseau bissecteur. Ceci permet de créer un relief influencé par la surface du contour 2D. Ainsi, un col permet de relier la surface non déformée des deux contours à une excroissance qui est présente sur un seul contour et n'a pas de relation directe avec l'autre section.

Il n'y a pas a priori de critère de choix qui puisse induire une solution plutôt qu'une autre, si ce n'est des critères esthétiques et le sentiment que la reconstruction de la figure VI.25B semble plus proche des objets naturels...

### **VI.3.2 - Généralisation de l'algorithme à toutes les zones bicolores**

En conclusion de ce qui vient d'être dit dans les deux paragraphes précédents, nous dégagerons la méthode générale de triangulation qui s'applique quelles que soient les situations.

**Le problème de la triangulation d'une zone différence est résolu par la triangulation de chaque arête de cette zone avec l'ensemble de ses bissectrices internes.**

En effet, quel que soit le cas de figure, zones simples, branchements ou variations de morphologie, la solution consiste toujours à trianguler les arêtes de SA et de SB, respectivement situées aux altitudes ZA et ZB, avec leurs bissectrices internes situées à l'altitude ZI définie au paragraphe VI.3.1.1. La procédure qui est alors mise en œuvre consiste à parcourir l'ensemble des arêtes de la zone différence, et de trianguler en fonction du critère de diagonale la plus courte les extrémités de l'arête considérée avec celles de ses bissectrices internes.

De plus cette technique nous permet de trianguler aussi tous les types de zones différences bicolores y compris sur celles qui comportent des trous. L'algorithme est donc tout à fait général :

Si Z est une zone différence munie de son réseau bissecteur :

Pour tous les contours C de Z

**Pour** (tous les contours C de Z)

**Pour** (toutes les arêtes A de C)

**Pour** (toutes les bissectrices internes B de A)

Trianguler l'arête A et la bissectrice B.

**Fin de Pour**

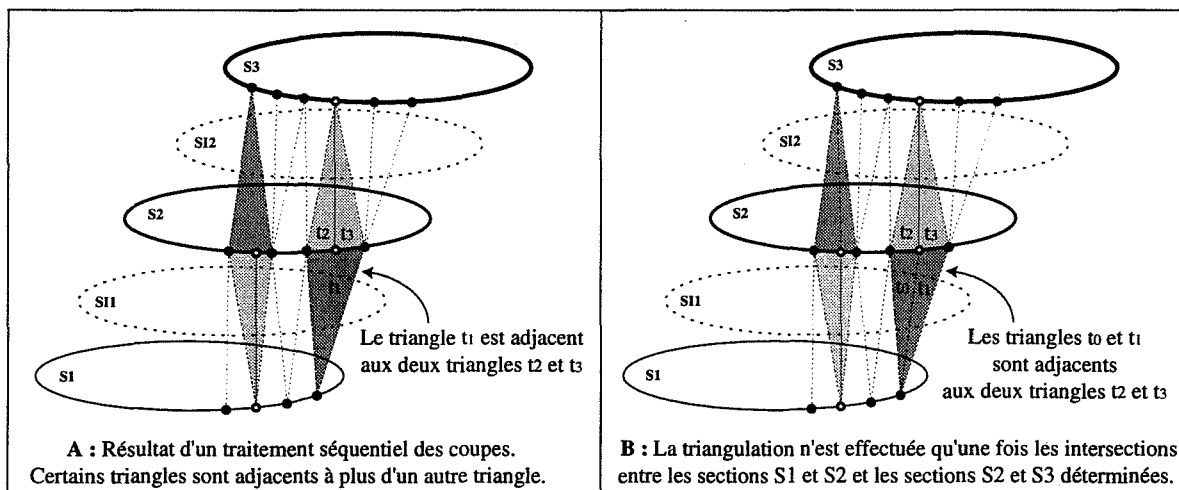
**Fin de Pour**

**Fin de Pour**

La triangulation effective entre les extrémités d'une arête et celles d'une bissectrice est identique à celle présentée par Christiansen [CHSE 78] (cf. § II.4.1.2).

La connexion de l'ensemble des zones différences triangulées ne pose pas de problèmes particuliers. La cohérence de l'orientation des normales est conservée, et les deux triangles externes de deux zones différences intersectées consécutives partagent l'arête reliant les deux points d'intersection.

Il faut, en revanche, s'assurer que tous les triangles adjacents de deux sections voisines partagent bien la totalité de leur arête commune. Le cas contraire n'intervient que lors de la présence d'un point d'intersection entre deux sections S2 et S3 (cf. fig. VI.26A). Les deux triangles issus de ce point d'intersection sur la section S2 sont adjacents à un seul triangle de la section S1. Ceci n'est pas cohérent avec la définition du maillage que nous avons donnée au paragraphe II.4.2 et peut de plus introduire des erreurs lors du calcul des normales au sommet de chaque face.



**Figure VI.26 :** Cohérence de la triangulation aux environs des points d'intersection entre sections voisines. (Par souci de clarté, la triangulation n'est pas représentée sur les sections intermédiaires).

Pour cette raison nous avons choisi d'élargir la fenêtre de traitement lors de la recherche initiale des intersections et de la construction des zones différences. Nous calculons d'abord les



zones différences entre S1 et S2, puis entre S2 et S3. Les éventuels points d'intersection trouvés sont alors tous insérés sur la section S2 et on peut appliquer l'algorithme de reconstruction entre S1 et S2 sans que cela pose de problèmes au niveau des jonctions entre triangles (cf. fig. VI.26B). De la même manière la reconstruction entre S2 et S3 implique de déterminer les intersections de la section S3 avec la section S4 si elle existe.

Des reconstructions basées sur des données réelles reprenant l'ensemble des résultats discutés ici sont présentées dans le chapitre VII.

### **VI.3.3 - Tests d'arrêt de la procédure de triangulation**

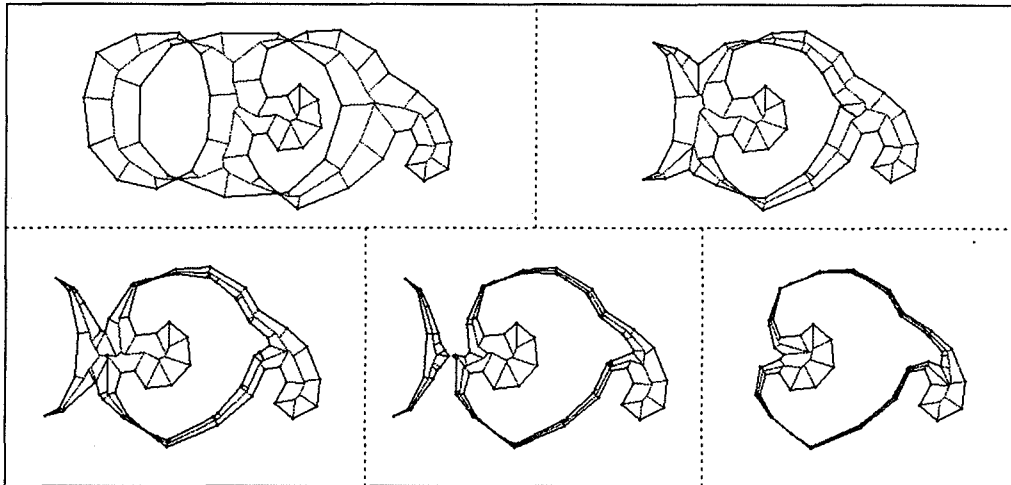
Comme dans le cas de la construction des sections intermédiaires deux grands types de tests d'arrêt peuvent être employés. Le premier type est basé sur un nombre de coupes ou un espacement minimum entre les coupes. Il peut être appliqué de la même manière lors de la reconstruction.

Comme nous l'avons déjà dit au paragraphe VI.2.4.1, le deuxième test est beaucoup plus intéressant car il se base sur la morphologie de la zone différence. Nous avons vu que cela permettait de relancer l'interpolation dans une zone différence en fonction des seules variations de morphologie des différents contours. En cela, ce test d'arrêt est auto-adaptatif.

La possibilité d'améliorer les détails de la forme en augmentant le niveau de l'interpolation et donc le nombre de sections provoque l'accroissement de la taille du modèle. Par exemple, le nombre de triangles est en gros multiplié par un facteur 3 lors de la construction d'une coupe intermédiaire. C'est toutefois un inconvénient qu'il est possible de diminuer lors de la reconstruction 3D par triangulation.

En effet, comme la procédure de triangulation peut s'effectuer indépendamment dans chaque zone différence, nous pouvons relancer la procédure d'interpolation uniquement dans les zones où de fortes variations morphologiques ont été détectées. Au contraire, dans les zones différences considérées comme "simples", c'est-à-dire où la majorité des arêtes ont un segment homologue sur les contours intermédiaires, l'interpolation ne sera pas relancée. Ceci permet de n'augmenter que localement le nombre des triangles construits.

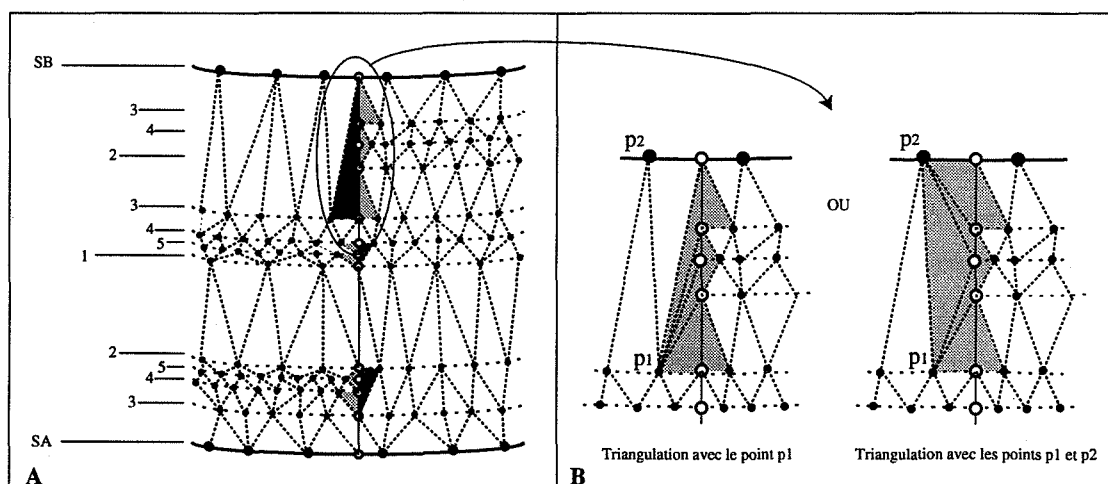
Sur un exemple similaire à celui de la figure VI.24 du paragraphe VI.3.1.2, on voit qu'il est possible d'améliorer très sensiblement la définition de la surface en relançant l'interpolation dans les zones différences où il existe des arêtes sans homologues. La figure VI.27 montre le résultat obtenu en augmentant le niveau de récursion de l'interpolation.



**Figure VI.27 :** Amélioration du détail de la surface par interpolations successives dans les zones différentes où certaines arêtes n'ont pas de segments homologues sur la chaîne intermédiaire.

Il est ainsi possible par ce biais de diminuer considérablement le nombre de zones où se posent des problèmes de variations morphologiques. Toutefois, ce processus ne peut pas être répété indéfiniment, en particulier dans les zones où des branchements sont présents. Il est donc souhaitable de fixer soit un nombre de coupes maximum, soit une distance inter-coupes limite au delà de laquelle l'interpolation n'est plus relancée même s'il existe encore des arêtes sans homologues.

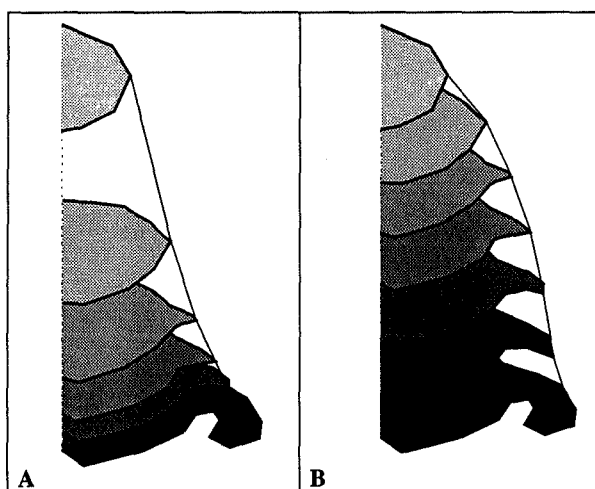
Une fois que toutes les interpolations ont été effectuées et que la phase de triangulation est achevée, il nous faut effectuer un raccordement cohérent de l'ensemble des triangles des différentes zones (cf. fig. VI.28A).



**Figure VI.28 :** Cohérence de la triangulation lorsque le niveau d'interpolation n'est pas le même dans deux zones différentes adjacentes.

Pour cela nous devons diviser les triangles dont un côté est à la verticale d'un point d'intersection en fonction du nombre d'interpolations effectuées dans les zones différences adjacentes au point d'intersection considéré (cf. fig. VI.28B).

Notons que si le nombre d'interpolations n'est pas le même dans les deux sous-zones d'une zone différence, les contours intermédiaires étant positionnés à une altitude intermédiaire entre les deux coupes initiales, ils ont tendance à être regroupés vers la section initiale qui comporte la variation de morphologie (cf. fig. VI.29A). Ainsi dans certains cas la déformation de la surface peut paraître trop lente.



**Figure VI.29 :** Redistribution des portions de contours intermédiaires afin de mieux répartir la déformation de la surface sur l'ensemble de la distance inter-coupe.

Il pourrait être souhaitable dans ce cas de redistribuer l'ensemble des altitudes de chacune des portions de contours issues de l'interpolation afin que leur distribution soit plus harmonieuse et que la déformation de la surface s'appuyant sur ces contours soit pressentie plus rapidement. La figure VI.29B illustre un cas de redistribution linéaire des contours qui peut, selon les données, paraître mieux adapté. Tous les types de distributions sont bien évidemment envisageables.

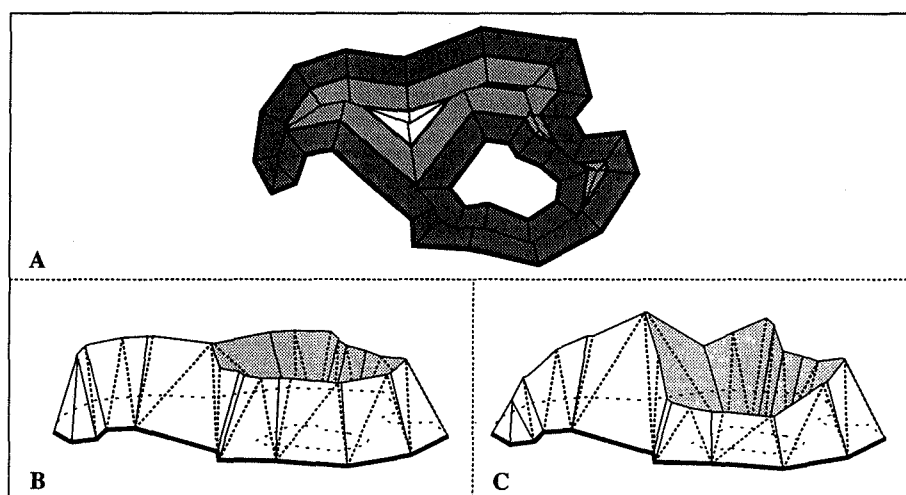
### VI.3.4 - Triangulation des zones différences unicolores

Comme dans le cas de la construction des sections intermédiaires, la reconstruction de zones de différences unicolores ne nécessite pas d'appliquer une procédure récursive. Pour les mêmes raisons que celles présentées dans le paragraphe VI.2.2.2, il s'agit simplement ici de mettre en correspondance un contour et son érodé ultime sur la section voisine.

D'autre part, dans le cas de la reconstruction 3D par triangulation, la construction de contours intermédiaires par érosion d'un contour augmenterait le nombre de triangles sans

améliorer la définition de la surface. En effet, tous les triangles qui s'appuient sur les arêtes parallèles à une même arête du contour sont coplanaires. Pour cette raison nous construisons directement la triangulation à partir des bissectrices du réseau bissecteur de la forme considérée.

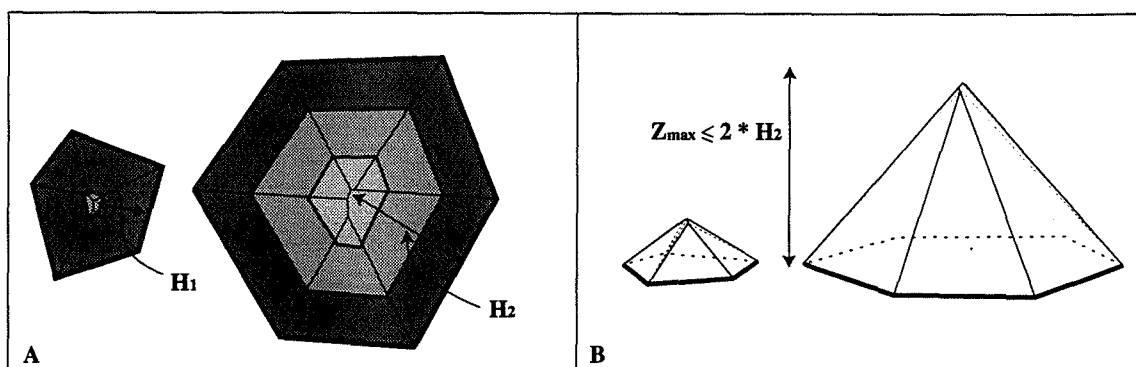
A ce niveau, deux stratégies sont possibles. Soit mettre tous les sommets des bissectrices internes à la même altitude, soit les mettre à une altitude qui dépende de l'influence du sommet sur la forme.



**Figure VI.30 :** Illustration des deux stratégies possibles lors de la reconstruction des "îles".  
La figure C tient compte de la "profondeur" des sommets pour fixer leur altitude.

Nous avons choisi la deuxième solution parce qu'elle permet, à l'inverse de la première (cf. fig. VI.30B), de mieux rendre compte de la morphologie de la forme (cf. fig. VI.30C). Il s'agit en fait de définir une surface à partir de points 2D, où l'altitude d'un point 3D de cette surface est fonction de la distance au contour de son correspondant 2D. De manière plus intuitive, on fabrique une "île" qui ne peut pas comporter de dépressions fermées, sauf si le fond de celle-ci est au même niveau que la mer (présence d'un trou dans la forme).

Comme dans le cas des coupes intermédiaires (cf. § VI.2.4.2), les hauteurs de chaque objet reconstruit sont pondérées par leur importance relative sur le plan (cf. fig. VI.31A). Ainsi pour conserver notre image de reliefs, un "gros" contour permettra de construire une grande montagne, alors que la reconstruction d'un petit contour donnera une petite montagne (cf. fig. VI.26B).



**Figure VI.31 :** Corrélation entre la hauteur d'une "île" et son "diamètre".  
Le contour le plus "imposant" fixe la hauteur maximale de la reconstruction.

Nous choisissons l'érodé final E dont la distance à son contour relatif est la plus grande. Soit  $H_{\max}$  cette distance. Si  $Z_{\max}$  est l'altitude à laquelle on veut positionner le point E, l'altitude d'un sommet à la distance h de son contour est donnée par :  $Z = \frac{Z_{\max}}{H_{\max}} \times h$ .

Le paramètre restant à fixer est  $Z_{\max}$ . Il est très difficile de le fixer globalement car il dépend essentiellement de la morphologie des contours. Nous avons choisi de le déterminer de manière automatique afin d'obtenir des objets qui ne sont jamais plus hauts que larges. La valeur  $Z_{\max}$  est donc égale à  $2 * H_{\max}$ . Ce paramètre va, en fait, fixer l'angle des différents flancs de l'objet à reconstruire.

D'autre part, nous imposons que, dans tous les cas,  $Z_{\max}$  soit toujours inférieure à  $\frac{ZB - ZA}{2}$ . De cette manière le sommet des îles ne peut jamais dépasser le niveau de la section intermédiaire.

Un objet ainsi reconstruit est donc toujours entièrement compris dans une sphère de rayon  $H_{\max}$ .

Tous ces critères sont tout à fait empiriques, et ne découlent que des observations que nous avons faites sur les données que nous avons pu traiter. Néanmoins cela semble correspondre à une classe non négligeable d'objets.

En dernier lieu, la triangulation est opérée entre chaque arête et l'ensemble de ces bissectrices internes (cf. fig. VI.31B).

### VI.3.5 - Amélioration de la triangulation

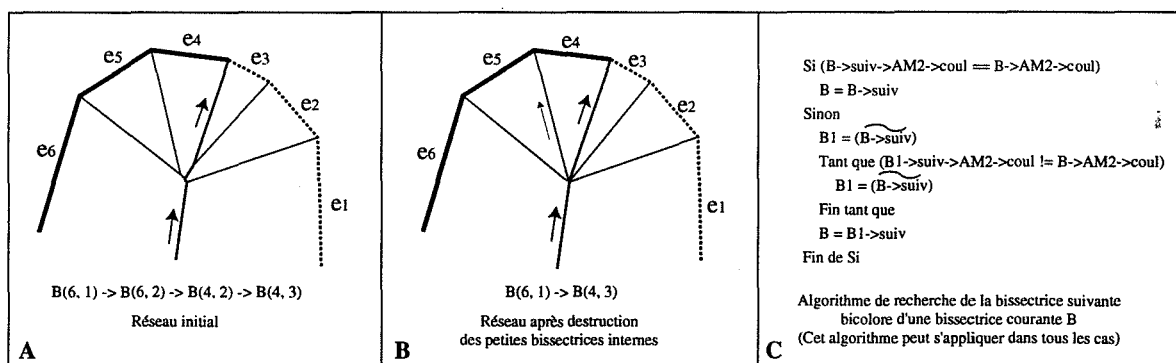
Le résultat de la procédure de triangulation fournit une surface brute qu'il est dans certains cas possible d'améliorer sans modifier les points originaux ni avoir recours à des méthodes globales de lissage. Il s'agit simplement de diminuer le nombre de triangles de petite taille et de contrôler localement la continuité de la surface.

#### VI.3.5.1 - Diminution du nombre de petits triangles

Nous avons vu au paragraphe VI.3.3 que l'ajout d'une portion de section intermédiaire augmente le nombre de triangles de la surface de l'objet. D'autre part, il est clair qu'une chaîne intermédiaire comporte en général plus de points que les contours à partir desquels elle est construite. Les longueurs des arêtes des chaînes intermédiaires sont donc généralement plus petites que celles des arêtes des contours initiaux.

Les triangles dont un côté s'appuie sur la chaîne intermédiaire auront donc en moyenne une forme beaucoup plus allongée que ceux qui s'appuient sur les arêtes des contours initiaux. Ce phénomène s'accroît d'autant plus dans les zones où les sommets du graphe du réseau bissecteur sont proches les uns des autres. De plus, l'augmentation des triangles dans ces zones ne contribue pas à affiner la description de la surface.

Pour ces raisons, nous avons décidé de détruire les bissectrices internes dont les longueurs sont vraiment trop petites par rapport à la moyenne générale des longueurs des bissectrices de la chaîne ou du contour intermédiaire considéré. Ceci revient à augmenter localement le degré d'un sommet du graphe du réseau bissecteur.



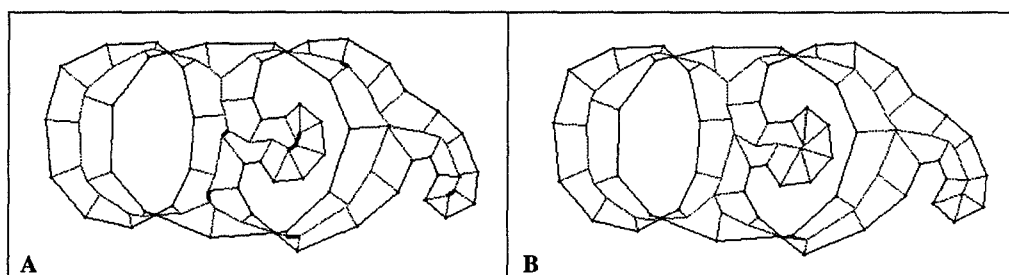
**Figure VI.32 :** La suppression des petites bissectrices internes, et donc l'augmentation du degré de chaque nœud, implique de vérifier l'appartenance des arêtes mères lors du parcours des bissectrices. Dans le cas contraire la bissectrice  $B(5, 4)$  pourrait être à tort retenue.

Dans ce cas un test d'arrêt doit être rajouté à la procédure de parcours à travers les bissectrices du réseau utilisée lors de l'extraction des zones intermédiaires. En effet, la procédure présentée au paragraphe VI.3.1.2 supposait que chaque sommet était considéré de

degré 3, et donc que la bissectrice trouvée était bien bicolore (cf. fig. VI.32A). En revanche, si l'extrémité de la bissectrice courante B a un degré supérieur à 3 et si sa bissectrice suivante n'est pas celle qui doit être empruntée (cf. fig. VI.32B), il faut tester les bissectrices issues du point extrémité de B suivant leur agencement polaire afin de déterminer celle qui doit être effectivement empruntée en fonction de l'appartenance aux formes SA et SB de ces deux arêtes mères.

L'algorithme sous-jacent est illustré par la figure VI.32C.

Plusieurs critères sont utilisables pour décider de la suppression d'une bissectrice interne B. Il est possible de comparer la longueur L de la bissectrice B avec la longueur moyenne M des bissectrices internes de la zone différence, et de la détruire si le rapport  $L/M$  est inférieur à une certaine valeur  $\alpha$  qui reste à fixer en fonction de la dynamique des données. On peut aussi comparer uniquement la longueur des bissectrices consécutives de la bissectrice courante, et décider de la destruction en fonction du rapport de leur longueur.



**Figure VI.33 :** Suppression des petites bissectrices internes avec un  $\alpha$  de 0,3.

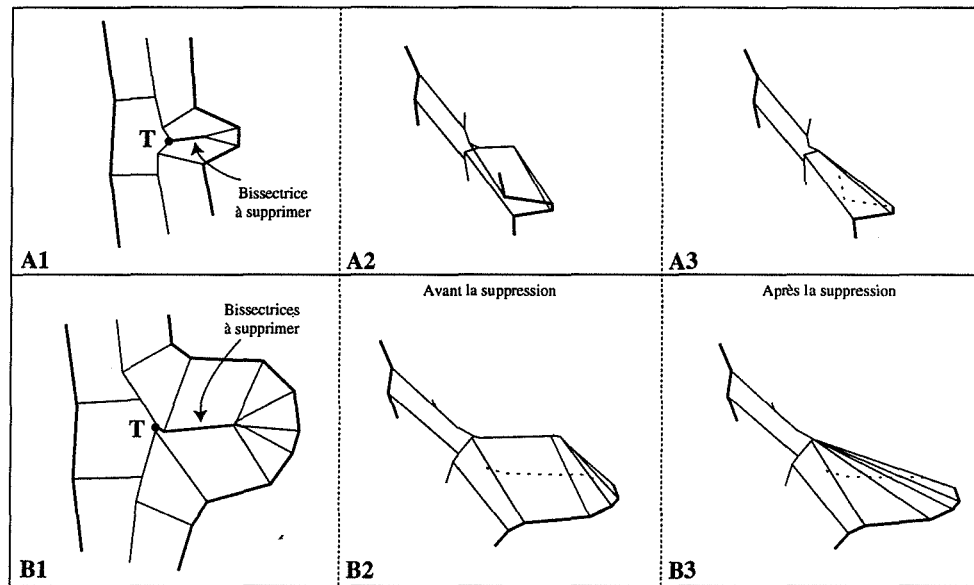
Le premier critère associé à un  $\alpha$  de 0,3 a été testé sur de nombreux exemples et donne des résultats satisfaisants (cf. fig. VI.33).

### VI.3.5.2 - Traitement des zones de variations mineures de morphologie

Le traitement des différences de morphologie évoqué au paragraphe VI.3.1.2 peut conduire à des effets de bords qui ne sont pas esthétiques. En effet, lorsqu'en fin d'interpolation deux ou trois arêtes ne sont pas directement connectées à la chaîne intermédiaire, la procédure de triangulation va relier chacune de ces arêtes à leurs bissectrices internes respectives. Une vision 3D de la triangulation finale montre que ces connexions provoquent de petites marches sur la surface de l'objet qui a priori n'ont pas lieu d'être (cf. fig. VI.34A2 et VI.34B2).

On peut appliquer un prétraitement pour facilement repérer et supprimer ces différences de morphologie mineures au sein d'une même chaîne qui peuvent nuire à l'homogénéité de la

surface. Ces cas illustrés respectivement par les figures VI.34A1 et VI.34B1 correspondent à des sommets convexes tronqués et à des zones de convexité où l'ordre des sommets dans le sens de parcours correspond à leur orientation polaire autour du point triple T marquant le début de la variation de la forme. Cette procédure permet ainsi de différencier automatiquement les zones à fortes variations morphologiques qui peuvent induire des intersections de la surface triangulée, des zones de variations mineures qui ne peuvent pas provoquer de telles dégénérescences.



**Figure VI.34 :** Suppression des bissectrices internes unicolores dans les zones de petites variations morphologiques. Le résultat obtenu dans les figures A3 et B3 permet de conserver une meilleure continuité de la surface de l'objet reconstruit.

Le traitement consiste alors à supprimer toutes les bissectrices internes des arêtes sans homologue considérées, et à translater l'extrémité de toutes les bissectrices externes de ces mêmes arêtes sur le point triple T. Le point triple devient donc un sommet de degré supérieur à 3. Les cellules ainsi modifiées peuvent être traitées sans difficulté par la procédure générale de triangulation sans provoquer de rupture dans la continuité de la surface (cf. fig. VI.34A3 et VI.34B3).

Notons que la majorité de ces bissectrices sont en général détruites lors de la recherche des "petites" bissectrices que nous avons évoquée au paragraphe VI.3.5.1.



# **TROISIÈME PARTIE**



**Résultats, tests**

**et**

**Extensions**



## - CHAPITRE VII -

# Résultats, discussions et extensions

### VII.1 - Résultats

Nous avons testé notre méthode de reconstruction 3D sur de nombreux exemples synthétiques et sur un certain nombre de données géologiques et médicales<sup>1</sup> réelles. Pour les jeux de données qui étaient représentés sous forme d'images nous avons utilisé soit une discrétisation manuelle, soit un programme de segmentation par une approche dérivée des contours actifs [CLST 94] suivi d'une phase d'approximation polygonale [EUTO 94].

L'analyse des résultats de ces tests nous a permis de dégager les atouts et les limitations de notre approche.

D'un point de vue algorithmique, l'obligation de calculer l'intersection entre deux coupes initiales consécutives est le point le plus délicat de la procédure de reconstruction. Cela nécessite d'implémenter un algorithme robuste de calcul des zones différences. Certains exemples comme des cerveaux humains n'ont pu être traités à cause des dégénérescences lors de cette phase de traitement.

La validation de la reconstruction 3D est très difficile sur les exemples géologiques à cause du peu d'informations que nous possédons sur les structures. La plupart des exemples traités représentent en effet des amas minéralisés localisés en profondeur dans le sous-sol qui ne sont pas directement appréhendables. Seule, la comparaison entre des sections initiales et des sections interpolées aux mêmes altitudes (cf. fig. VI.18) permet "d'estimer" la justesse de la reconstruction. Toutefois la comparaison de la morphologie, de la topologie et du volume de nos modèles 3D avec ceux réalisés par M. Dolliazal [DOLL 94] montre une certaine cohérence.

En revanche, sur les exemples médicaux, la reconstruction semble visuellement correcte.

---

<sup>1</sup> Les données médicales utilisées ici sont disponibles sur le site ftp du projet Prisme de l'INRIA-Sophia Antipolis ([betelgeuse.inria.fr/pub/Contours](http://betelgeuse.inria.fr/pub/Contours)). Cette initiative est due à Bernhard Geiger qui souhaitait mettre à la disposition des utilisateurs une base de données test.

Les résultats obtenus permettent de caractériser les données en trois grandes catégories :

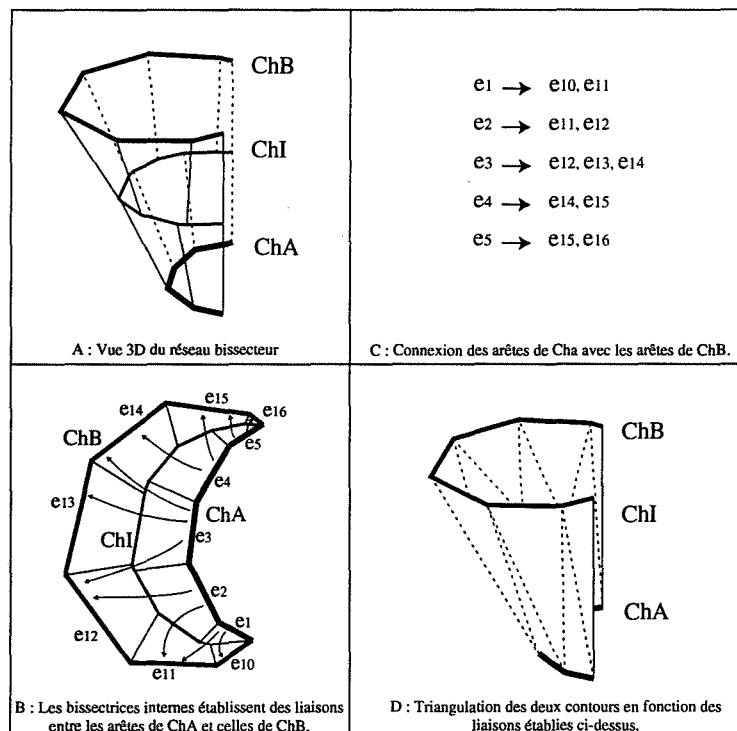
- les corps dont la topologie est simple,
- les objets de topologie et de morphologie complexes,
- les objets qui possèdent de nombreuses excroissances et dont les sections ont des formes filaires.

### VII.1.1 - Corps de topologie simple

Deux exemples médicaux, un cœur et une tête, sont bien représentatifs de cette classe d'objets. Les coupes ne possèdent pas de très grandes différences de morphologie entre sections voisines et seuls quelques cas de branchements simples sont rencontrés.

Nous obtenons des résultats intéressants sur ces données mais nous n'apportons pas d'améliorations majeures par rapport aux méthodes de reconstruction 3D existantes.

Le fait de construire systématiquement au moins une coupe intermédiaire ne se justifie pas sur ce type d'exemple simple. Cela augmente le nombre de triangles de la surface de l'objet sans en améliorer la définition.



**Figure VII.1 :** Exemple de triangulation directe dans les zones de faibles variations morphologiques. La triangulation est déduite des relations de chaque bissectrice interne avec les différentes arêtes.

En fait, il est possible dans les cas simples de trianguler directement les contours originaux sans passer par des coupes intermédiaires. En effet quand une zone différence ne comporte que deux chaînes appartenant à SA et à SB et lorsque toutes les arêtes ont un homologue sur la chaîne intermédiaire (cf. fig. VII.1B), il suffit de trianguler directement les arêtes qui possèdent une bissectrice interne commune (cf. fig. VII.1D).

Ceci permet de diminuer sensiblement le nombre de triangles (cf. Tableaux VII.1 et VII.2) sans pour autant altérer la représentation surfacique de l'objet (cf. fig. VII.2 et 3).

En appliquant cette procédure couplée avec la suppression des petites bissectrices (cf. § VI.3.5.1), nous diminuons de 40 à 50% le nombre de triangles suivant les exemples traités.

	Temps total cpu	Tps de triangulation	Nb Triangles	Nb Points
<i>1 interpolation</i>	<i>2,41 sec.</i>	<i>0,11 sec.</i>	<i>6 418</i>	<i>3 211</i>
<i>1 interpolation + D</i>	<i>2,53 sec.</i>	<i>0,18 sec.</i>	<i>4 244</i>	<i>2 124</i>
<i>1 interpolation + D + S</i>	<i>2,41 sec.</i>	<i>0,10 sec.</i>	<i>3 546</i>	<i>1 775</i>

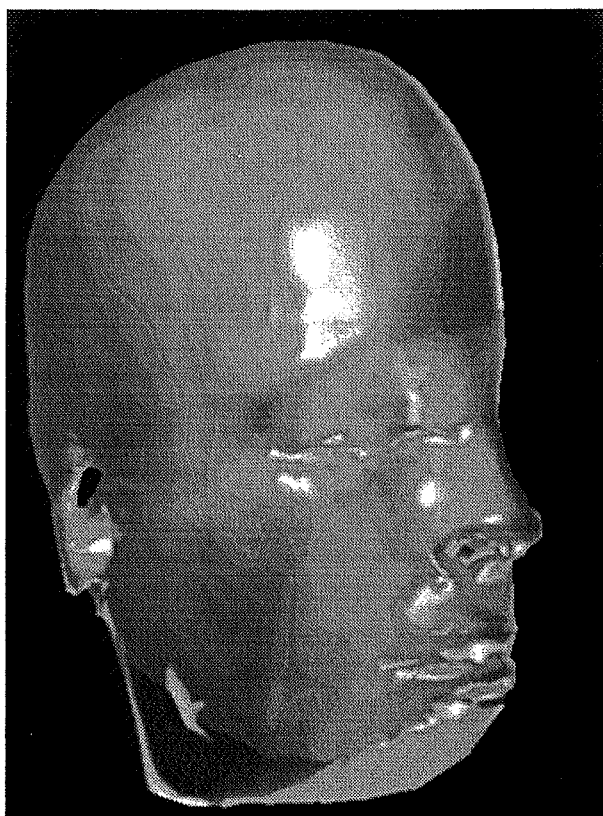
**Tableau VII.1 :** Exemple d'une tête : 17 coupes, 26 contours, 856 points initiaux  
(D = Triangulation directe, S = Suppression de petites bissectrices, temps CPU sur SUN IPX).

	Temps total cpu	Tps de triangulation	Nb Triangles	Nb Points
<i>1 interpolation</i>	<i>3,53 sec.</i>	<i>0,13 sec.</i>	<i>8 614</i>	<i>4 300</i>
<i>1 interpolation + D</i>	<i>3,51 sec.</i>	<i>0,23 sec.</i>	<i>5 176</i>	<i>2 581</i>
<i>1 interpolation + D + S</i>	<i>3,83 sec.</i>	<i>0,18 sec.</i>	<i>4 618</i>	<i>2 302</i>

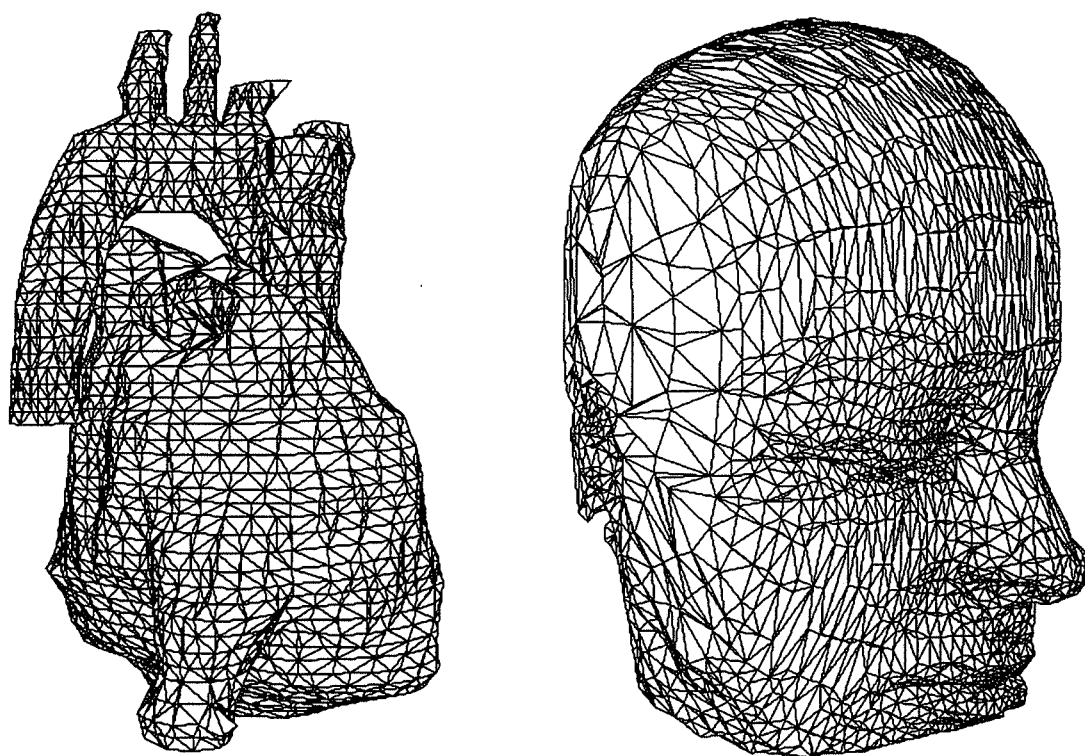
**Tableau VII.2 :** Exemple d'un cœur : 29 coupes, 58 contours, 1 222 points initiaux  
(D = Triangulation directe, S = Suppression de petites bissectrices, temps CPU sur SUN IPX).



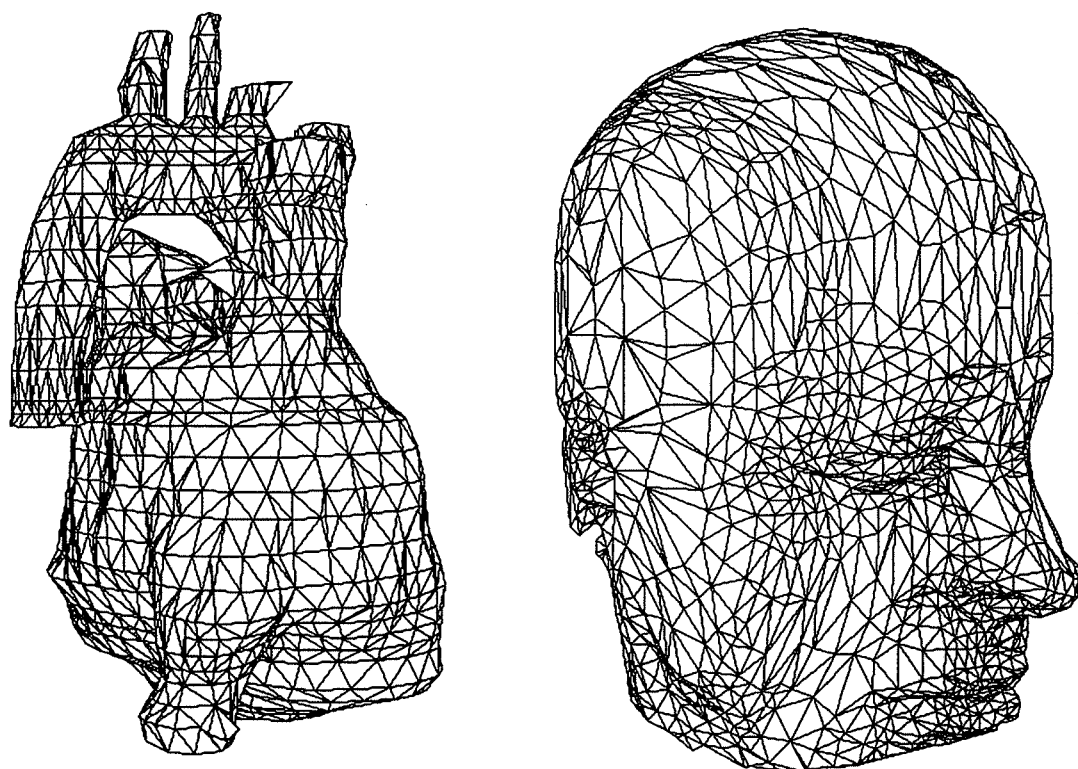
**Figure VII.2A :** Exemple de reconstruction d'un cœur



**Figure VII.2B :** Exemple de reconstruction d'une tête



**Figure VII.3A :** Maillages du cœur et de la tête issus de la méthode de reconstruction classique.



**Figure VII.3B :** Exemple de reconstruction d'un cœur et d'une tête en supprimant les petites bissectrices et en triangulant directement les zones de faible variation morphologique.

### VII.1.2 - Corps de topologie et de morphologie complexes

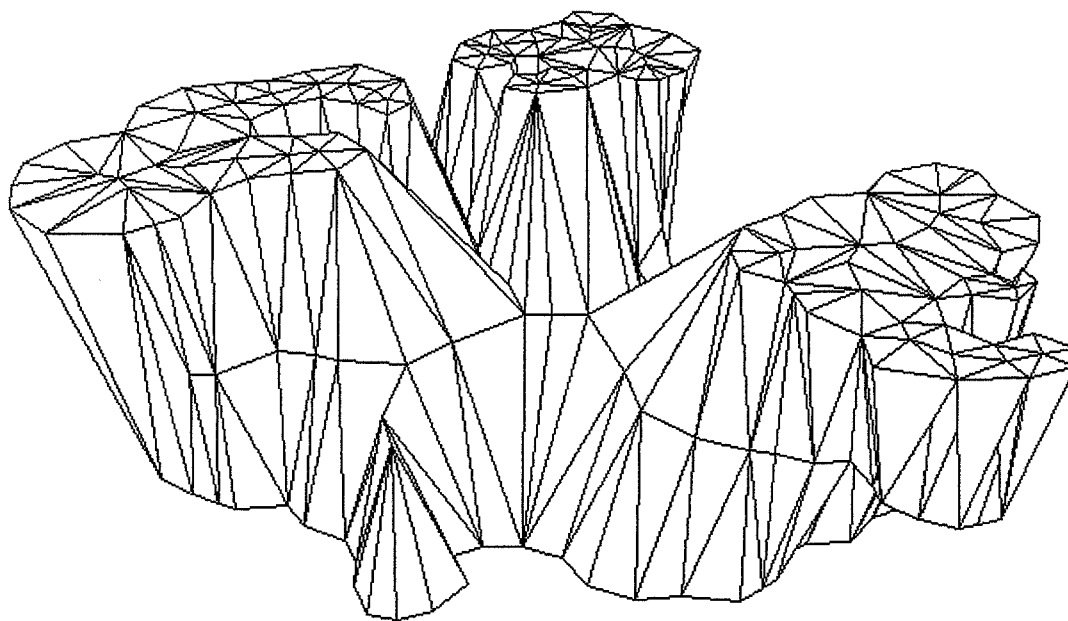
La mine de Hajar au Maroc et deux exemples médicaux, un bassin et des poumons, peuvent être classés dans cette catégorie. Les exemples médicaux présentent de nombreux branchements complexes et des trous. Les sections de la mine de Hajar ont en plus des morphologies très différentes. Cela s'explique par la grande distance inter-coupe qui avoisine ici les vingt mètres.

C'est sur ce type de données que notre méthode produit les meilleurs résultats.

Toutes les variations de topologie sont traitées de manière systématique et automatique.

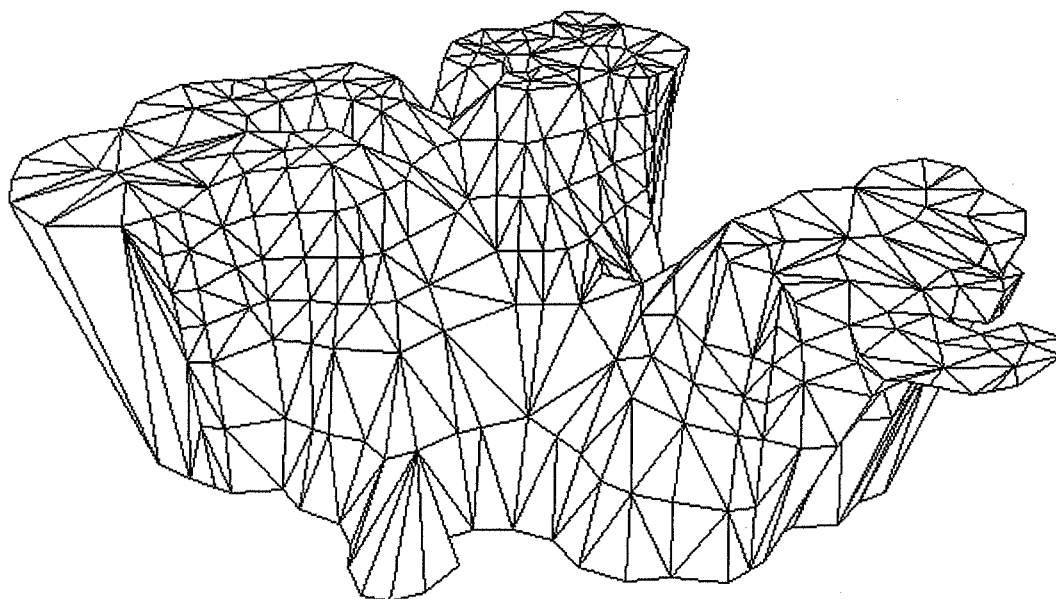
De plus, en augmentant le nombre de phases d'interpolation uniquement dans les zones de grandes variations morphologiques nous pouvons affiner la surface de l'objet. Ainsi les zones de branchement entre deux sections initiales SA et SB ne seront pas forcément situées à une altitude  $(Z_A + Z_B) / 2$ , mais dépendront de la "distance" séparant les différentes composantes connexes (cf. fig. VII.4B).

D'autre part, les variations de morphologie d'une zone différence seront moins brutales si plusieurs interpolations sont effectuées dans cette zone.



**Figure VII.4 A :** Reconstruction d'un exemple synthétique avec 1 interpolation.

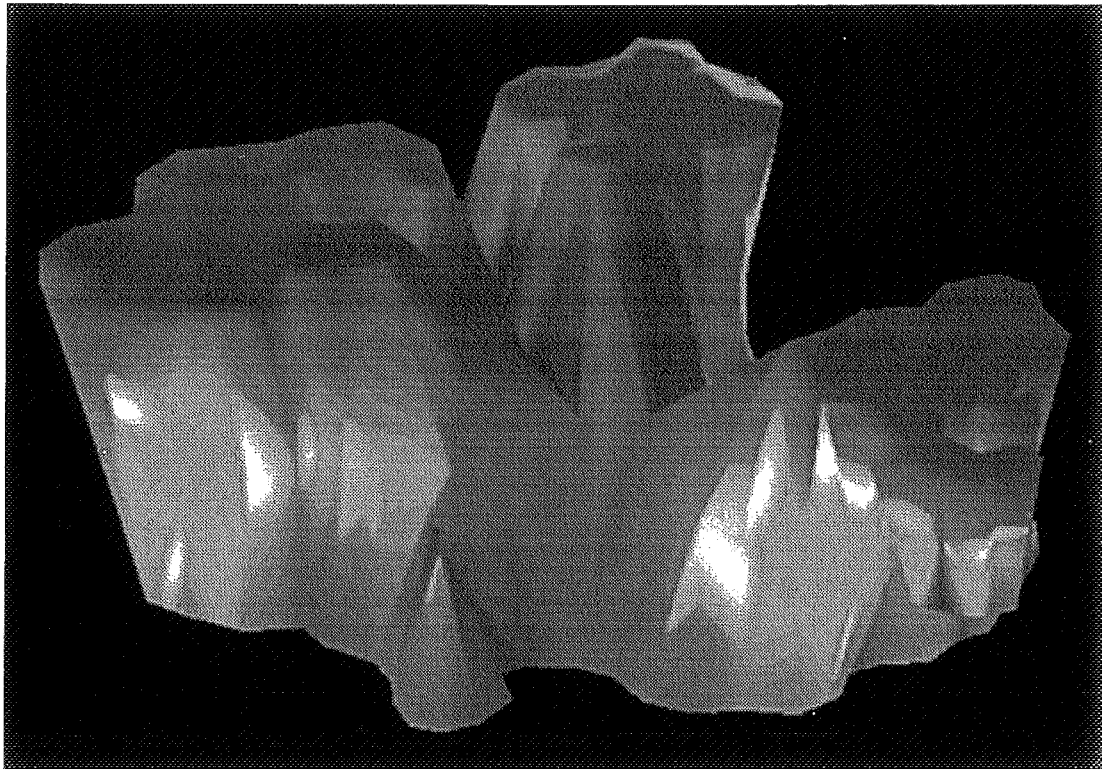




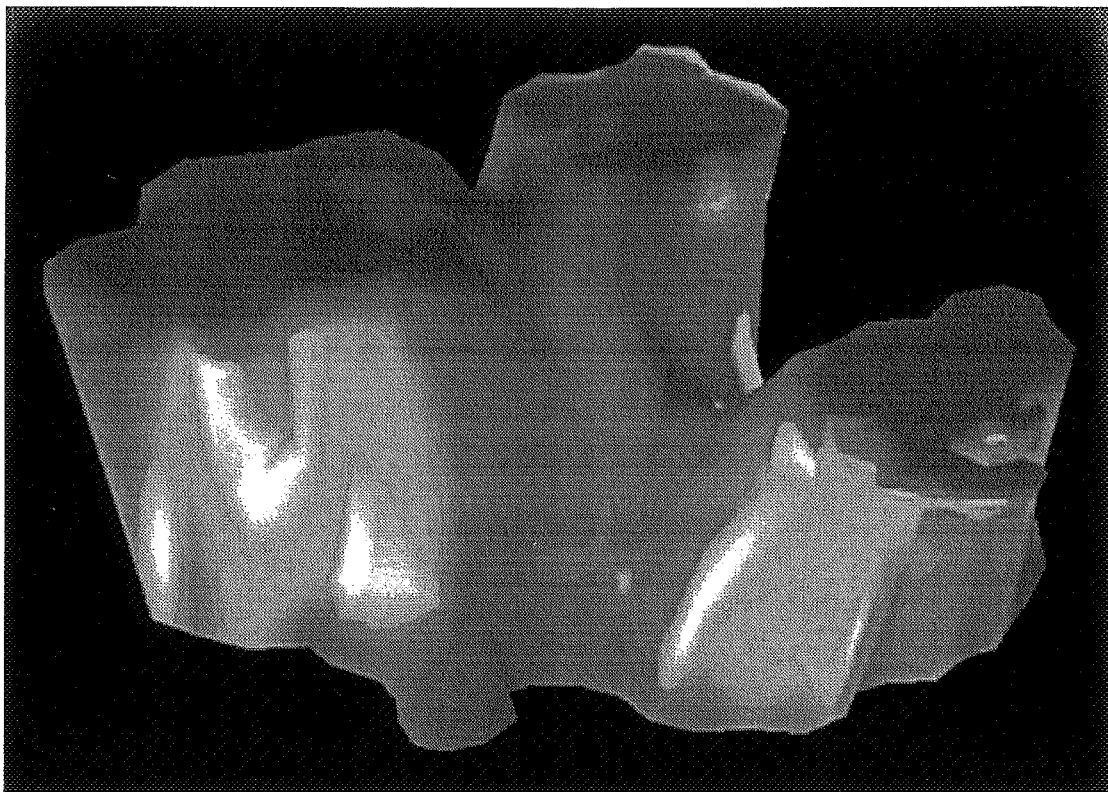
**Figure VII.4 B :** Reconstruction d'un exemple synthétique avec 7 niveaux d'interpolation.  
La différence de la position des zones de branchements  
et l'atténuation des variations morphologiques est à remarquer.

Ceci présente un réel intérêt pour les objets dont les sections sont assez espacées, comme la mine de Hajar (cf. fig. VII.6 et 7). Nous voyons très clairement sur la figure VII.7A que la surface est définie de manière grossière. En augmentant le nombre d'interpolations comme dans le cas de la figure VII.7B, certaines zones sont beaucoup mieux affinées.

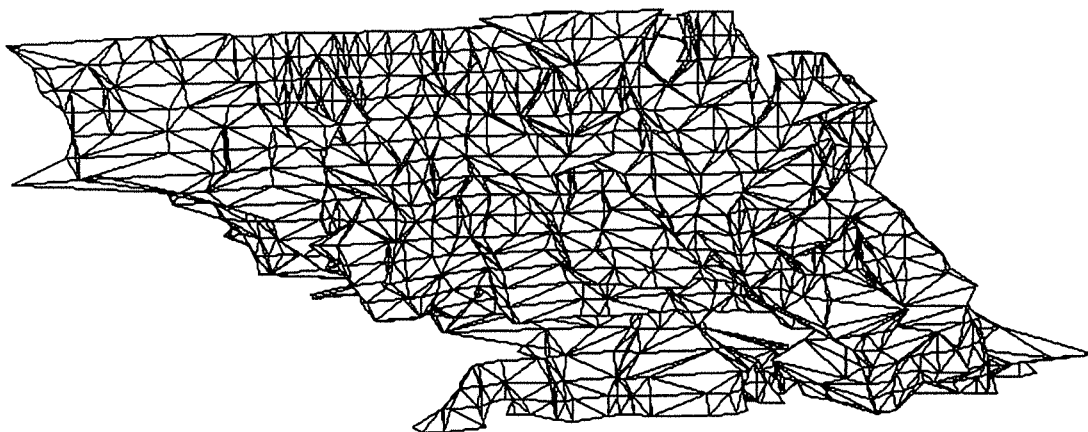
En ce qui concerne les exemples médicaux que nous avons traités, une section intermédiaire suffit pour accroître le niveau de détails de la surface reconstruite (cf. fig. VII.10 et 11). En effet, les zones différences ne sont pas très complexes et à la fin de la première interpolation la quasi totalité des zones peuvent être triangulées directement (cf. fig. VII.8 et 9).



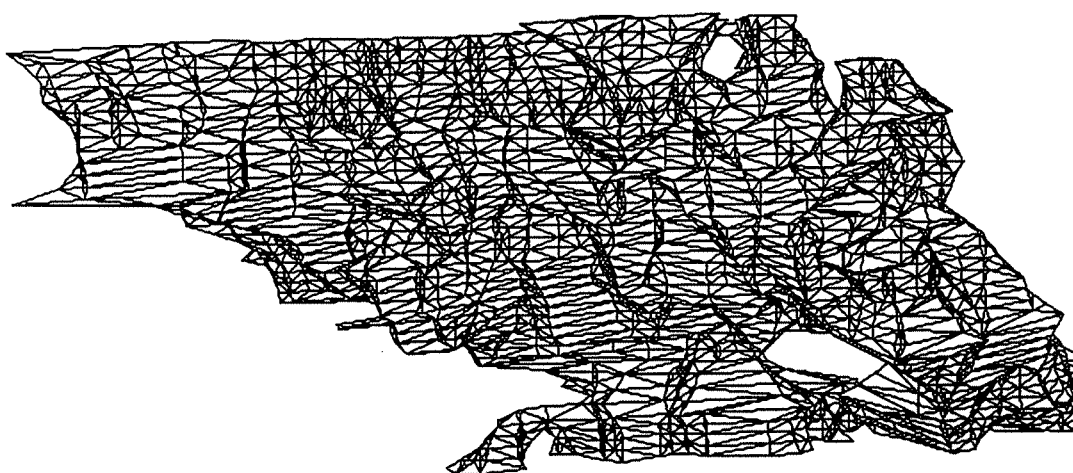
**Figure VII.5A :** Visualisation de l'exemple de la figure VII.4A.



**Figure VII.5B :** Visualisation de l'exemple de la figure VII.4B.



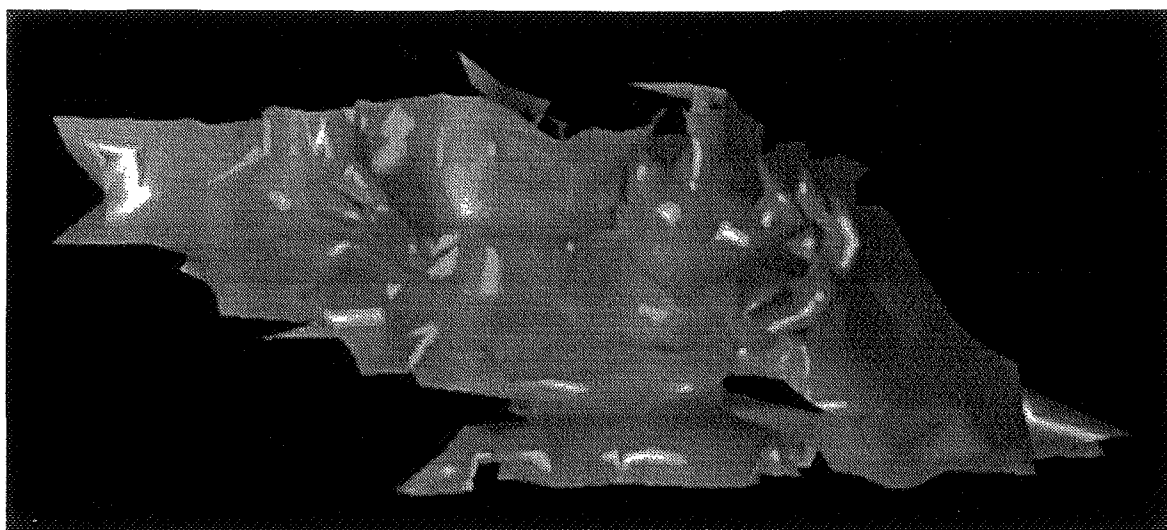
**Figure VII.6A :** Exemple de reconstruction de la mine de Hajar au Maroc avec 1 niveau d'interpolation.



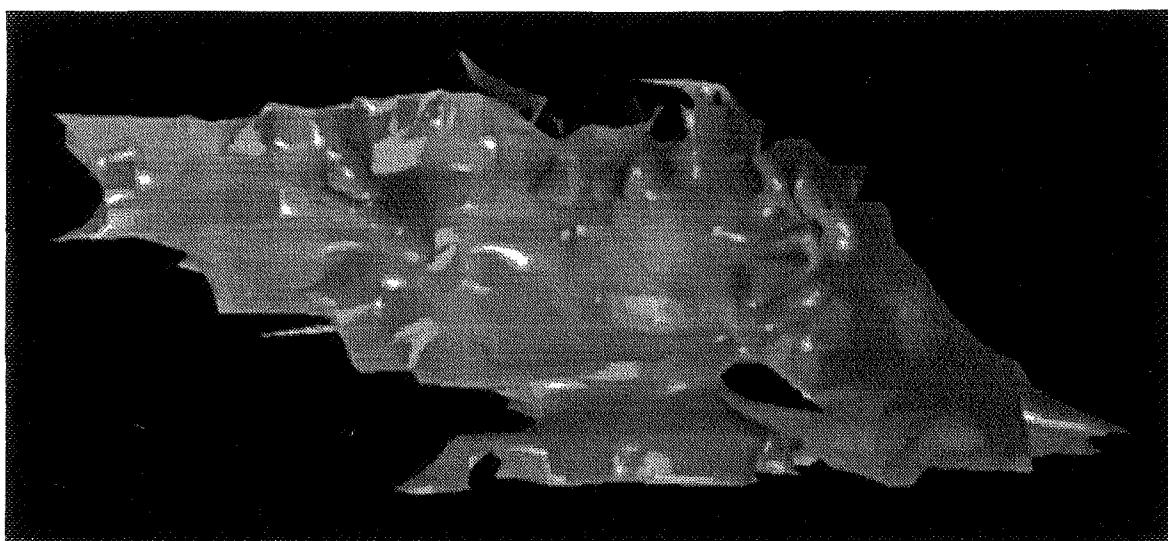
**Figure VII.6B :** Exemple de reconstruction de la mine de Hajar au Maroc avec 3 niveaux d'interpolation.

	Temps total cpu	Tps de triangulation	Nb Triangles	Nb Points
<i>1 interpolation</i>	<i>1,78sec.</i>	<i>0,21 sec.</i>	<i>4 842</i>	<i>2 405</i>
<i>1 interpolation + D</i>	<i>1,70 sec.</i>	<i>0,06 sec.</i>	<i>4 074</i>	<i>2 021</i>
<i>1 interpolation + D + S</i>	<i>1,80 sec.</i>	<i>0,06 sec.</i>	<i>3 286</i>	<i>1 627</i>

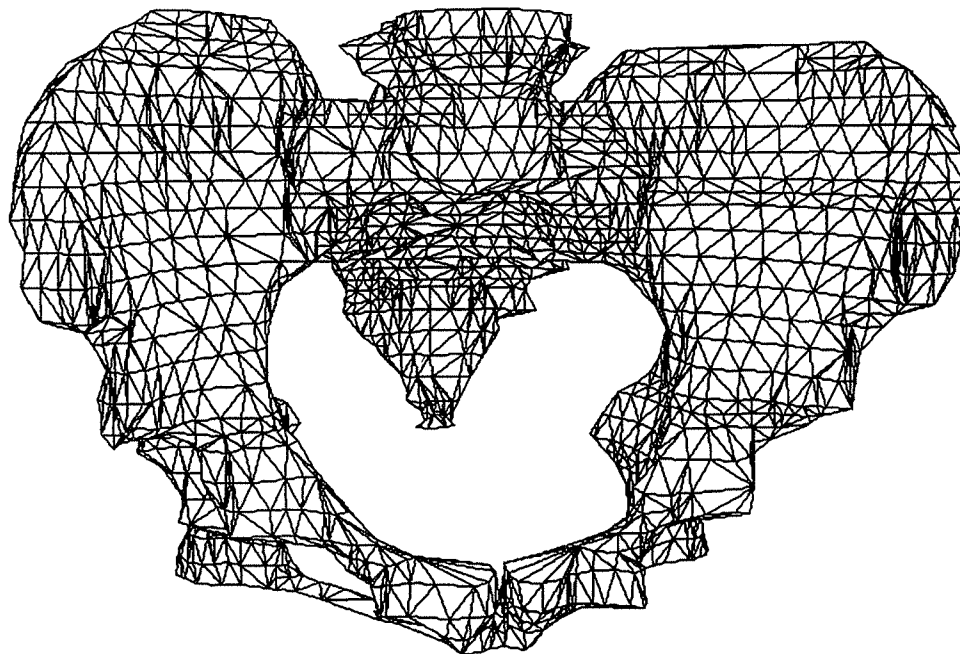
**Tableau VII.3 :** Exemple de la mine de **Hajar** : 11 coupes, 36 contours, 636 points initiaux (D = Triangulation directe, S = Suppression de petites bissectrices, temps CPU sur SUN IPX).



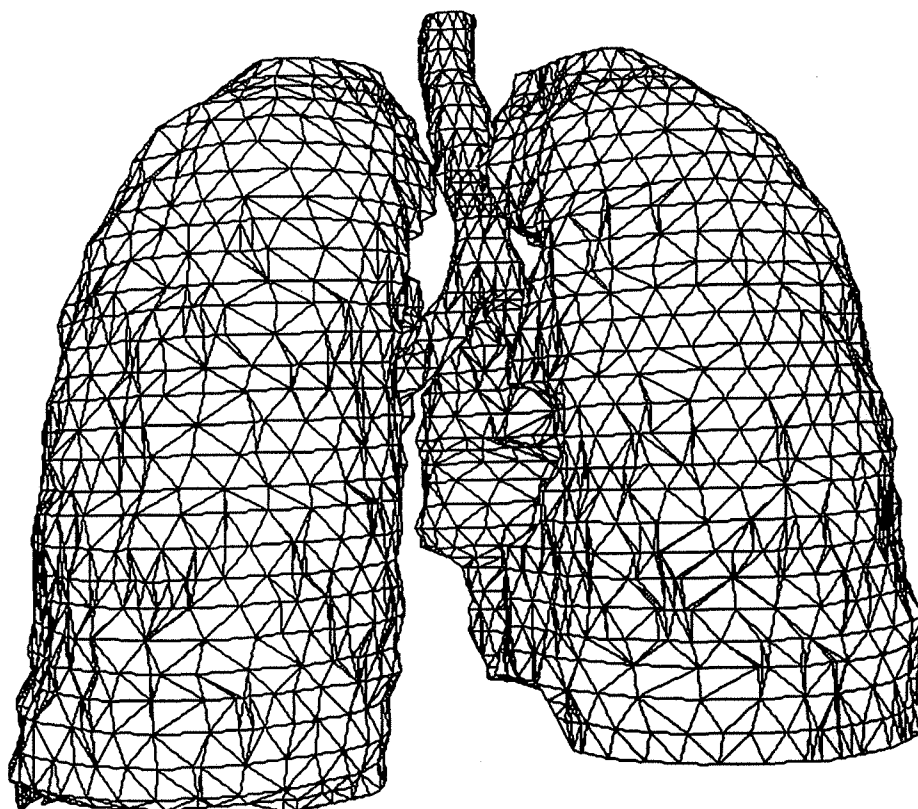
**Figure VII.7A :** Visualisation de l'exemple de la figure VII.6A.



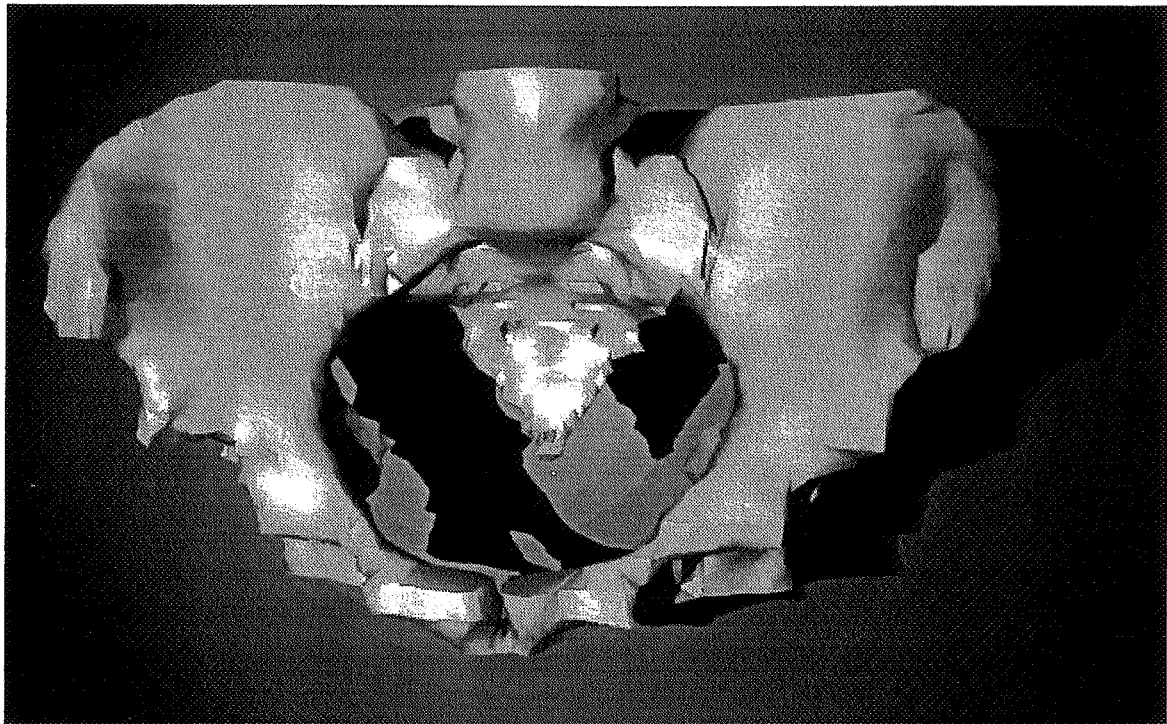
**Figure VII.7B :** Visualisation de l'exemple de la figure VII.6B.



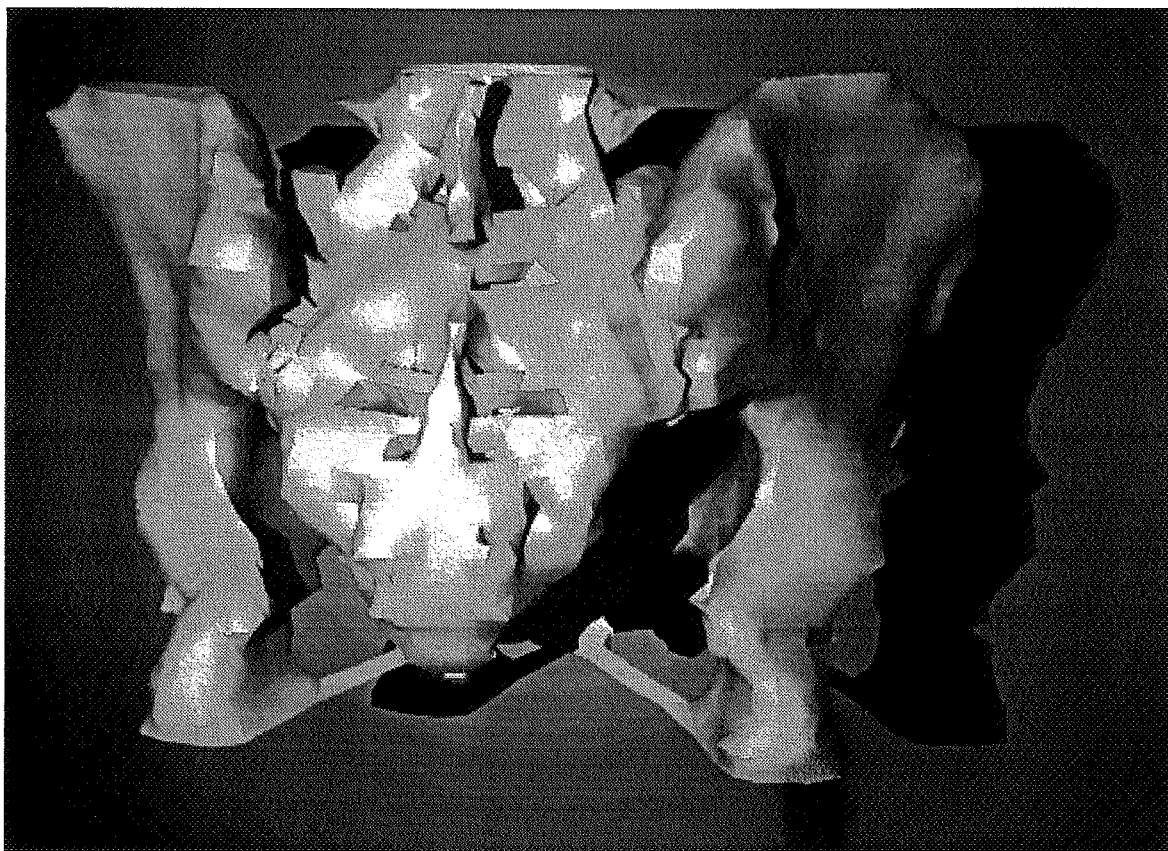
**Figure VII.8 :** Maillage avec triangulation directe et suppression des petites bissectrices dans le cas d'un bassin humain.



**Figure VII.9 :** Maillage avec triangulation directe et suppression des petites bissectrices dans le cas d'un poumon humain.

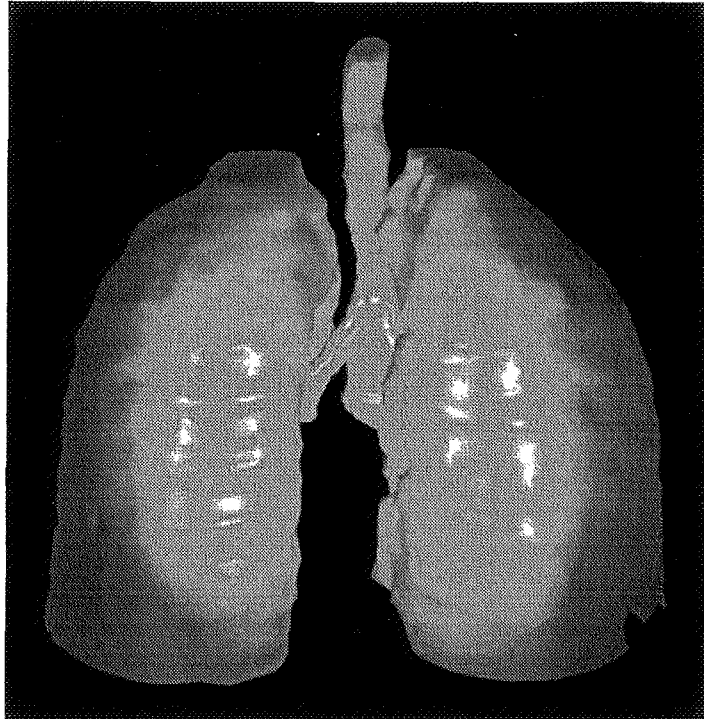


**Figure VII.10A :** Vue de face de la reconstruction du bassin.

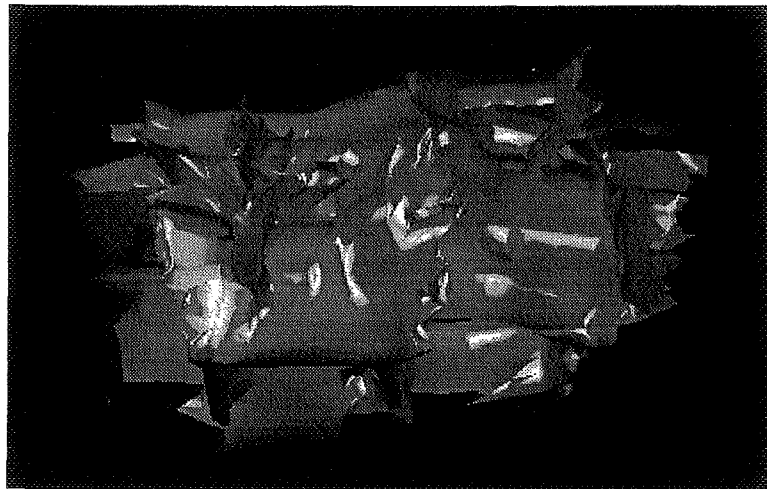


**Figure VII.10B :** Vue de dos de la reconstruction du bassin.





**Figure VII.11 :** Exemple de reconstruction de poumons humains.



**Figure VII.12 :** Exemple de reconstruction de sections de nodules de Barytine.



**Figure VII.13 :** Exemple de reconstruction d'un contour isolé.

Les temps CPU de la reconstruction du bassin et du poumon, ainsi que le nombre de triangles construits sont représentés dans les deux tableaux ci-dessous.

	Temps total cpu	Tps de triangulation	Nb Triangles	Nb Points
<i>1 interpolation</i>	<i>6,90 sec.</i>	<i>0,48 sec.</i>	<i>15 395</i>	<i>7 656</i>
<i>1 interpolation + D</i>	<i>6,90 sec.</i>	<i>0,40 sec.</i>	<i>10 528</i>	<i>5 217</i>
<i>1 interpolation + D + S</i>	<i>6,90 sec.</i>	<i>0,23 sec.</i>	<i>8 755</i>	<i>4 330</i>

**Tableau VII.4 :** Exemple d'un **bassin** : 23 coupes, 85 contours, 2 067 points initiaux  
(D = Triangulation directe, S = Suppression de petites bissectrices, temps CPU sur SUN IPX).

	Temps total cpu	Tps de triangulation	Nb Triangles	Nb Points
<i>1 interpolation</i>	<i>11,5 sec.</i>	<i>0,73 sec.</i>	<i>22 098</i>	<i>11 032</i>
<i>1 interpolation + D</i>	<i>11,3 sec.</i>	<i>0,45 sec.</i>	<i>12 154</i>	<i>6 060</i>
<i>1 interpolation + D + S</i>	<i>12,0 sec.</i>	<i>0,46 sec.</i>	<i>10 650</i>	<i>5308</i>

**Tableau VII.5 :** Exemple d'un **poumon** : 34 coupes, 86 contours, 3 016 points initiaux  
(D = Triangulation directe, S = Suppression de petites bissectrices, temps CPU sur SUN IPX).

### VII.1.3 - Corps de forme filaire avec excroissances

Nous n'avons rencontré ce type d'objets qu'en géologie. Il s'agit de sections dans un nodule de Barytine dont l'intérieur est constitué par de nombreuses fissures. L'intérêt est de reconstruire le réseau de fracturation. Ce travail est réalisé au Centre de Sédimentologie de l'École des Mines de Paris par Saba Mostéfaï.

Les résultats obtenus en appliquant directement notre méthode sur ce type d'exemple ne correspondent pas à ceux attendus (cf. fig. VII.12).

Comme nous l'avons vu au paragraphe V.1.1.2, cela est dû à une mauvaise mise en correspondance des différents contours. Étant donné qu'il est a priori difficile de mettre en œuvre un ajustement "contraint" qui permette d'associer certaines parties indépendamment des autres, toutes les méthodes opérant par mise en correspondance globale par superposition ne peuvent donner une "bonne reconstruction" sur ce type d'exemple.

La méthode qui nous semble la plus efficace est une association des points caractéristiques des deux sections consécutives suivie par une phase de triangulation et de gestion des branchements, l'association des points pouvant se faire de manière interactive ou automatique (cf. §V.3). A ce stade, les zones de branchement doivent être traitées au cas par cas. Cette approche n'est donc plus systématique, mais c'est la seule qui nous paraisse pouvoir traiter les problèmes spécifiques de ce type de données.



## VII.2 - Discussions

### VII.2.1 - Complexité et temps de calculs

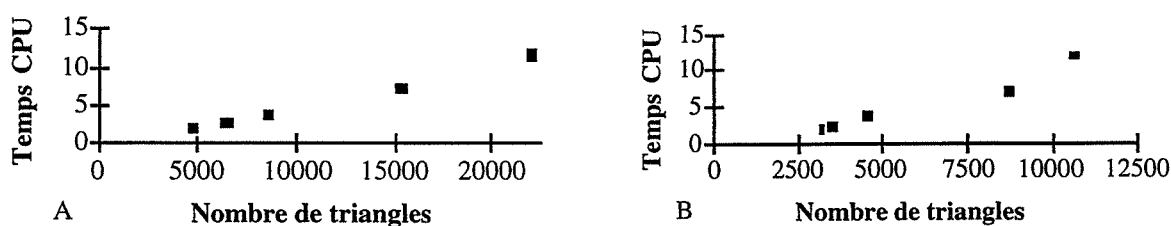
L'analyse de l'algorithme général de notre méthode de reconstruction de deux sections S1 et S2 comportant en tout  $n$  sommets permet de définir la complexité théorique globale.

```

Pour (chaque couple de sections S1 et S2)
1) | Projeter les deux formes sur un même plan et les positionner
2) | Extraire les zones différences des deux formes
   | Tant que (il existe une zone différence Z non traitée)
3) |   Construire le réseau bissecteur de la zone différence Z
4) |   Supprimer les petites bissectrices du réseau bissecteur
   |   Si (Z peut être triangulée "simplement")
5) |     | Trianguler Z
   |   Sinon
6) |     | Extraire les nouvelles sous-zones différences
   |   Fin de Si
   | Fin Tant que
Fin de Pour
  
```

Après la phase de projection (1) réalisée en  $O(n)$ , la recherche des zones différences (2) et le calcul du réseau bissecteur (3) s'effectuent dans le pire des cas en  $O(n^2)$ . La suppression des petites bissectrices (4) ainsi que la triangulation (5) requièrent  $O(n)$  opérations.

La complexité théorique pour trianguler deux sections à l'aide d'une seule section intermédiaire est donc majorée par la complexité de la recherche des intersections et par celle de la construction du réseau bissecteur, c'est-à-dire  $O(n^2)$ . Toutefois dans la pratique l'évolution des temps CPU n'est pas quadratique (cf. fig. VII.14).



**Figure VII.14 :** Évolution des temps d'exécution en fonction du nombre de triangles construits.

A gauche sans approximation, à droite en supprimant les petites bissectrices et en triangulant directement les zones différences simples (cf. tableaux VII.1 à 5).

Si plusieurs sections intermédiaires sont nécessaires, il faut rajouter la phase d'extraction des nouvelles zones différences (6) qui est effectuée en  $O(n)$ . La complexité liée aux phases de construction du réseau bissecteur dépend ensuite du nombre de sommets dans chaque nouvelle zone différence et du nombre d'interpolations souhaité.

Nous donnons dans le tableau ci-dessous les temps d'exécution concernant la mine de Hajar en fonction du nombre d'interpolations. Ces temps correspondent à des interpolations dans toutes les zones différences et sans suppression des petites bissectrices. A chaque nouvelle interpolation le nombre de triangles et le temps CPU nécessaire sont multipliés par un peu plus de 2.

Coupes intermédiaires	1	3	7	15
Temps CPU	1,78	3,55	8,83	46,21
Nombre de triangles	4 842	10 740	28 254	76 190

**Tableau VII.6 :** Temps d'exécution de l'exemple de la mine de Hajar avec un nombre d'interpolations différent. (temps CPU sur SUN IPX).

## VII.2.2 - Comparaisons des résultats

Nous avons eu l'occasion de comparer nos résultats avec ceux obtenus avec les méthodes de B. Geiger [GEIG 93] et de M. Dolliazal [DOLL 94].

Du point de vue de la méthodologie les trois méthodes opèrent la mise en correspondance des contours en fonction de la superposition des contours lors d'une projection orthogonale. Les méthodes de Geiger et de Dolliazal sont un peu moins strictes puisqu'elles autorisent la connexion de contours non superposés mais très proches. Toutefois, ceci peut dans certains cas amener à des connexions non-solides qu'il faut éliminer par la suite.

En raison de ce choix de mise en correspondance, aucune des trois méthodes ne peut traiter correctement le cas de sections filaires avec des excroissances.

Au niveau du traitement des variations de topologie, les trois méthodes semblent opérer de manière automatique et systématique. Outre la possibilité de créer un nombre important de coupes par interpolation entre deux formes, notre méthode permet en ajoutant des portions de coupes intermédiaires d'améliorer sensiblement la définition des surfaces, en particulier au niveau des zones de branchement et des zones de variations de morphologie. D'autre part, elle permet de traiter correctement les contours isolés.

En ce qui concerne la triangulation, la méthode proposée par B. Geiger est celle qui construit le moins de triangles. Elle a de plus l'avantage de permettre une reconstruction volumique à l'aide de tétraèdres. En ce qui concerne les résultats de M. Dolliazal, le résultat de la triangulation est fortement influencé par l'interpolateur DSI. Ceci donne un maillage très serré dans les zones complexes et plus lâche dans les zones sans grandes modifications. Ceci est possible parce que les sommets de la triangulation ne respectent pas les données initiales des contours.

La comparaison entre les volumes et les aires des différents modèles 3D ne montre pas de différences globales assez nettes pour être exploitées.

Les temps d'exécutions que nous avons obtenus (cf. tableaux VII.1 à VII.5) sont inférieurs de moitié à ceux obtenus sur les mêmes exemples et sur la même machine par le logiciel "nuages" de B. Geiger<sup>1</sup> (cf. Tableau VII.7) pour un nombre de triangles supérieur d'un facteur 2 à 3. Toutefois, le logiciel "nuages" calculant aussi un lissage de normales au niveau des sommets, cette comparaison n'est donnée qu'à titre indicatif.

<b>Exemples</b>	<b>Tête</b>	<b>Cœur</b>	<b>Hajar</b>	<b>Bassin</b>	<b>Poumon</b>
<i>Temps CPU</i>	8,1	22,8	33,4	13,5	9,5
<i>Nombre de triangles</i>	1 998	2 942	2 458	5 480	6 864

**Tableau VII.7 :** Temps d'exécution des différents exemples avec le logiciel "nuages" sur SUN IPX.

La technique de M. Doliazal nous semble trop fortement liée à l'interpolateur DSI de Gocad et ne peut de ce fait être réellement comparée aux deux autres méthodes. Au vu des différents résultats, nous pouvons dire que la méthode de B. Geiger et celle que nous proposons produisent des résultats assez similaires. Le logiciel "nuages" permet d'obtenir en plus une description volumique des objets, alors que le détail des surfaces est mieux rendu grâce à l'ajout de portions de contours intermédiaires dans notre approche. De plus la méthode proposée ici permet de gérer les cas de contours isolés (cf. fig. VII.13).

---

<sup>1</sup> Ce logiciel est disponible sur le site ftp : [betelgeuse.inria.fr/pub/Contours](http://betelgeuse.inria.fr/pub/Contours).

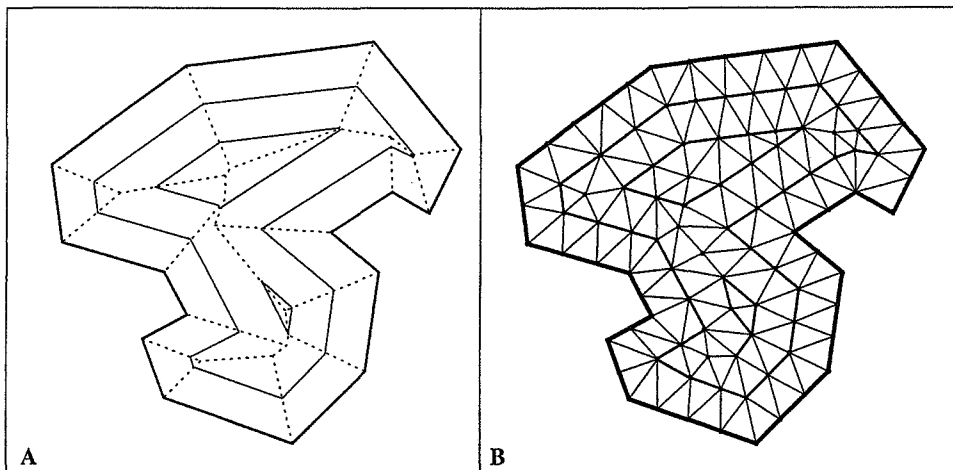
## VII.3 - Extensions

Nous donnons dans ce chapitre quelques extensions qui en raison de la faible complexité algébrique du réseau bissecteur en 2D et en 3D peuvent être des pistes de travail intéressantes.

### VIII.3.1 - Création de maillages 2D et 3D

Dans le cadre des maillages de formes 2D [PEST 95], les cellules du réseau bissecteur d'un espace polygonal peuvent être utilisées pour subdiviser l'espace en zones simples. Comme dans le cas du diagramme de Voronoï généralisé, le réseau bissecteur peut aussi servir à définir directement un maillage en partant des bords de la forme vers l'intérieur.

Nous avons vu, au chapitre IV, que le réseau bissecteur d'une forme polygonale définissait un ensemble de contours parallèles à la frontière de cette forme (cf. fig. VII.15A). Ces contours peuvent être construits avec un pas constant ou un pas variable. Comme le réseau bissecteur est uniquement composé de segments de droites, il est possible de trianguler directement les "lames cristallines" (cf. fig. IV.32) à chaque étape de la croissance en choisissant un pas pré-défini. Ceci permet de créer facilement un maillage 2D moyennant quelques règles d'approximation à définir (cf. fig. VII.15B).



**Figure VII.15 :** Exemple de construction "manuelle" d'un maillage triangulaire (B) d'une forme polygonale s'appuyant sur les contours parallèles (A) tracés à partir du réseau bissecteur de la forme.  
De la même manière un maillage quadrangulaire peut-être imaginé.

La même approche doit pouvoir s'imaginer en sens inverse, c'est-à-dire en partant de l'intérieur de la forme vers l'extérieur, ceci afin de limiter les problèmes d'approximation vers le centre de la forme.

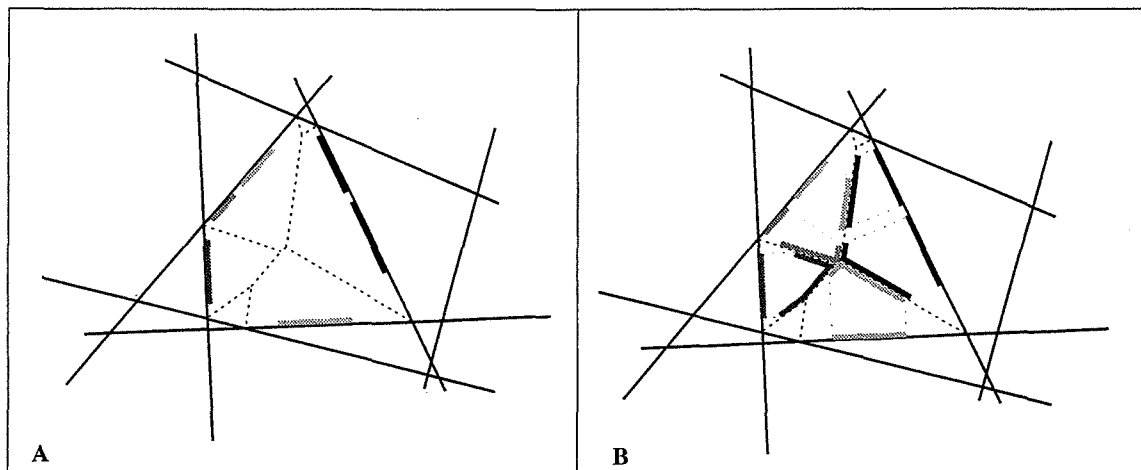
Une méthodologie similaire peut-être imaginée dans un cas tridimensionnel. Ceci nécessite la construction du réseau bissecteur 3D. A l'inverse du Diagramme de Voronoï 3D [STIF 91], le réseau bissecteur 3D d'un polyèdre n'est composé que de portions de plans et chaque facette externe de l'objet possède une cellule polyédrique. Les différentes surfaces parallèles qui peuvent être construites à partir de ce réseau représentent un feuilletage de l'objet 3D qui intersecte l'ensemble des cellules. De manière analogue au cas 2D, un maillage tétraédrique ou hexaédrique doit pouvoir être construit plus ou moins facilement dans chaque cellule afin de former un maillage 3D du volume de l'objet.

### VIII.3.2 - Reconstruction de coupes d'orientations quelconques

L'utilisation du réseau bissecteur doit aussi pouvoir être utilisé pour reconstruire des objets connus par des plans de coupes d'orientations quelconques qui s'intersectent.

L'idée est de construire dans une première étape l'ensemble des blocs convexes issus de l'intersection de tous les plans de coupes. Le traitement est ensuite effectué à l'intérieur de chaque bloc.

Le réseau bissecteur 3D (ou le DVG 3D puisque les blocs sont convexes) est alors construit dans chaque bloc. Comme chaque cellule 3D est monotone par rapport à sa facette relative (cf. fig. VII.16A), les contours de chaque facette peuvent être projetés perpendiculairement au plan de la facette sur chacune des faces de la cellule relative à cette facette (cf. fig. VII.16B).



**Figure VII.16 :** Vue en coupe 2D de la construction du DVG 3D d'un ensemble de sections intersectantes (A), et de la projection des différents contours sur les plans bissecteurs relatifs aux arêtes considérées (B).

Chaque plan bissecteur du bloc comporte maintenant la projection des contours issus des deux facettes qui ont générées ce plan. La méthode de reconstruction exposée dans les

chapitres précédents peut alors s'appliquer directement sur l'ensemble des plans bissecteurs relatifs à une facette donnée.

L'utilisation d'une telle méthode nécessite que les données soient, au préalable, recalées au niveau des intersections entre plans.

### VIII.3.3 - Interpolation et extrapolation de surfaces

La dernière application concerne le réseau bissecteur 3D. Il s'agit de définir des corps intermédiaires entre deux surfaces ou objets initiaux.

Après positionnement des deux objets l'un par rapport à l'autre, centrage, dimensionnement, rotation, les volumes différences des deux objets sont calculés. A l'intérieur de chacun des volumes, le réseau bissecteur 3D est calculé. Ensuite, et de la même manière qu'en deux dimensions, la surface intermédiaire est extraite en ne gardant que les plans bissecteurs issus de facette appartenant aux deux objets. L'interpolation peut être ensuite relancée de manière dichotomique dans chaque nouveau volume différence.

Cette technique doit permettre de dégager assez facilement un ensemble de volumes intermédiaires entre un objet initial et un volume cible<sup>1</sup>.

Les points principaux restent la phase de positionnement, l'implémentation d'un algorithme robuste d'intersection de volumes et la recherche d'un algorithme efficace de construction du réseau bissecteur 3D.

Dans le cas d'une extrapolation de surface, il suffit de construire le réseau bissecteur 3D et de construire la ou les surfaces parallèles à la ou les distances choisies de l'objet. Comme dans le cas des maillages 3D, ceci permet de créer un feuilletage autour de l'objet ou de la surface en ne construisant le réseau qu'une seule fois.

L'intérêt de générer de tels feuilletages est étroitement lié aux problèmes rencontrés en géologie (cf. § I.4.2). Ces feuilletages peuvent être utilisés dans la propagation d'informations de surface à l'intérieur du volume des objets, dans le cas de la représentation de textures 3D par exemple. L'interpolation entre deux surfaces de stratification et la construction des surfaces intermédiaires (dans le cas de modélisation de plusieurs couches concordantes par exemple ou dans le cas de plissements dysharmoniques) est une application directe de ce type d'approche.

---

<sup>1</sup> Un travail de DEA concernant l'interpolation de deux surfaces altimétriques est en cours d'achèvement à l'École des Mines de Paris (CGI).

## - CONCLUSION -

Nous avons proposé dans cette thèse une approche de la reconstruction 3D dont les nombreux avantages ne sont pas tous pris en compte en même temps par les méthodes classiquement utilisées.

Bien qu'elle puisse s'appliquer à tous les domaines où ce type de modélisation est utilisé, elle est particulièrement efficace lorsque la morphologie et la topologie de l'objet est complexe, comme c'est souvent le cas en géologie.

La première étape consiste à mettre les contours de deux sections consécutives en correspondance. Ceci est réalisé grâce à une projection orthogonale de l'ensemble des contours sur un même plan, après avoir éventuellement positionné les deux sections, l'une par rapport à l'autre, de manière globale. La phase de projection dégage des zones différences composées de portions de contours relatives à au moins une des sections. Tous les traitements ultérieurs auront lieu à l'intérieur de ces zones.

Dans une deuxième phase, nous construisons à l'intérieur de chaque aire différence un diagramme de Voronoï généralisé (DVG), le réseau bissecteur. Ce diagramme, qui ne comporte que des segments de droite, a la même structure en cellules que le DVG.

En considérant uniquement les portions du réseau relatives à la fois à la section supérieure et inférieure, nous obtenons dans chaque aire différence un ensemble de chaînes polygonales qui fournissent une bonne interpolation entre les portions de contours appartenant à la section supérieure et ceux appartenant à la section inférieure. La concaténation de l'ensemble de ces chaînes fournit une forme intermédiaire aux deux formes initiales.

Cette section intermédiaire interpolée va être utilisée dans la dernière étape pour construire le maillage triangulaire de la surface de l'objet final. Chaque arête des contours initiaux est alors simplement triangulée avec les sommets internes de sa cellule. Ceci permet de traiter de façon unique l'ensemble des problèmes de topologie, comme les branchements multiples, la présence de trous, etc... D'autre part, la relance de l'interpolation dans les zones différences "complexes" permet d'affiner la description de la surface en fonction de la géométrie des contours initiaux.

En conclusion nous soulignerons les points forts de notre démarche :

- La reconstruction 3D et le traitement de tous les problèmes de topologie, à savoir les zones de branchements simples ou multiples, la présence de trous qui peuvent également se diviser, les différences de morphologie, etc..., sont réglés de manière entièrement automatique par ajout de sections intermédiaires à l'aide du réseau bissecteur.
- L'inférence de sections intermédiaires garantit aussi, dans tous les cas et sans post-traitement, l'obtention d'une surface non auto-intersectante respectant la définition d'une bonne triangulation donnée par Gitlin et al. [GIOR 93], et ce, quelle que soit la complexité des sections originales.
- L'utilisation d'une interpolation récursive par le biais du réseau bissecteur permet de définir autant de sections intermédiaires que l'on souhaite. Cette caractéristique peut être aussi bien utilisée lors d'une reconstruction 3D que pour interpoler deux formes 2D, pour réaliser une animation par exemple.
- Lors de reconstructions surfaciques, l'emploi de tests d'arrêt adaptatifs et des procédures de simplification du réseau bissecteur, autorise la création de nombreuses portions de contours intermédiaires dans les zones de grande complexité et donc l'obtention d'une surface très détaillée, sans pour autant aboutir à un nombre prohibitif de simplex.
- Dans le domaine de l'imagerie 3D et de la reconstruction volumique, notre méthode d'interpolation peut compléter les approches standard puisqu'elle donne des résultats à des distances infra-pixels. En effet, elle permet de fournir de nombreuses coupes intermédiaires interpolées même lorsque la dynamique des données suivant l'axe des Z est supérieure à celle du plan XY.

Le fait que notre méthode d'interpolation soit complètement intuitive, c'est-à-dire que l'on puisse directement imaginer le résultat en regardant simplement la superposition des différentes sections, est d'après nous un avantage non négligeable. Ceci permet de pressentir, avant même de la mettre en œuvre, si elle donnera les résultats que l'on attend sur le jeu de données à traiter.



Le réseau bissecteur, qui est au cœur de notre méthode, s'est révélé un outil d'interpolation et un descripteur de forme très efficace. Sa complexité algébrique linéaire facilite grandement son utilisation en 2D et permet d'imaginer de nombreuses applications de son extension 3D, notamment dans le domaine de l'interpolation de volumes.

La méthodologie décrite au chapitre V propose un début de solution à la reconstruction 3D d'objets où la mise en correspondance des points et celle des contours des différentes sections joue un rôle primordial. Il serait intéressant de coupler les approches de l'intelligence artificielle avec les techniques de la reconstruction 3D pour obtenir des solutions réalistes sur des données dont on possède une grande connaissance. En effet, les seuls critères physiques ou géométriques peuvent être souvent insuffisants pour induire dans tous les cas la solution attendue par l'utilisateur.



# LISTES DES FIGURES

## CHAPITRE I :

<b>Figure I.1 :</b>	La couche $\zeta$ subit deux déformations successives $\Phi_1$ et $\Phi_2$ .....	11
<b>Figure I.2 :</b>	Exemple d'application d'un outil "dynamique" pour modéliser une scène. ....	13
<b>Figure I.3 :</b>	Cisaillements simples utilisés dans POLYPLI., d'après [PECH 93]. ....	15
<b>Figure I.4 :</b>	Recherche de la position stratigraphique d'un point de l'écran dans POLYPLI, d'après [PECH 93]. ....	15
<b>Figure I.5 :</b>	Exemple de modélisation à l'aide de POLYPLI. Les phases utilisées pour obtenir le résultat, sont décrites par la nature du profil, le plan axial et la droite de glissement.....	16
<b>Figure I.6 :</b>	Les solides en géologie ne sont pas tous Eulériens. Le bloc ci-dessus présente une partie de faille "ballante", ce qui ne correspond pas à un solide couramment manipulé en modélisation solide.....	21
<b>Figure I.7 :</b>	Exemple de surfaces polarisées. Les flèches pointent vers le volume le plus ancien. ....	23
<b>Figure I.8 :</b>	Exemple de surfaces non polarisées. Les flèches pointent vers le volume le plus ancien. Dans ce cas, chaque côté de la surface est tournée vers un volume dont l'âge est plus ancien.....	23
<b>Figure I.9 :</b>	Notion de concordance et de discordance.....	24
<b>Figure I.10 :</b>	Structuration d'un volume en fonction des différentes surfaces. Les volumes élémentaires B1, ..., B4 sont issus de la division du volume par les surfaces A, ..., D. ....	24
<b>Figure I.11 :</b>	Les trois configurations des plans contenant des contours à reconstruire : plans parallèles, plans non parallèles et non intersectants, et enfin les plans quelconques.....	32
<b>Figure I.12 :</b>	Éventuelle obliquité des facettes en relation avec la vraie courbure de l'objet. Seule une connaissance a priori peut permettre de déterminer la "bonne" solution. ....	34
<b>Figure I.13 :</b>	Exemple d'interpolation à partir de points appartenant à quatre objets différents. La figure de gauche montre le diagramme de Voronoï des points qui permet d'extraire les zones relatives à chaque objet (figure de droite). ....	35
<b>Figure I.14 :</b>	Exemple d'interpolation entre des données hétérogènes. La figure A présente les données disponibles initialement. L'interpolation des données, réalisée par construction d'un diagramme de proximité entre les différents éléments, suivie de l'extraction des portions des cellules ayant une appartenance mixte, est illustrée par la figure B. Ce résultat est à comparer avec la figure C qui montre les objets réels (terre et mer) sur lesquels sont superposées les données échantillonnées.. ....	36

## CHAPITRE II :

<b>Figure II.1 :</b>	Orientation de contours vectoriels induisant l'intérieur et l'extérieur de l'objet.....	40
<b>Figure II.2 :</b>	Exemple d'image numérisée et de résultats de segmentation. ....	41
<b>Figure II.3 :</b>	Illustration de la notion de pixel (2D) et de voxel (3D). ....	43
<b>Figure II.4 :</b>	Méthode de reconstruction volumique. ....	44
<b>Figure II.5 :</b>	Exemple de partition de l'espace permettant de repérer l'intérieur d'un objet, d'après [PEAR 88]. ....	45
<b>Figure II.6 :</b>	Méthode de reconstruction surfacique.....	46
<b>Figure II.7 :</b>	Les différents types de connexion entre les contours de deux sections consécutives.....	47
<b>Figure II.8 :</b>	Il n'existe pas de solution unique au problème de la connexion des contours.....	47
<b>Figure II.9 :</b>	Résultat de l'échantillonnage en fonction de l'angle entre les plans de coupes et l'axe de l'objet. Le résultat de la mise en correspondance sera différent dans chacun des cas. ....	48
<b>Figure II.10 :</b>	Méthodes d'approximation de la zone d'intersection entre deux contours par leur boîte englobante.....	50
<b>Figure II.11 :</b>	Illustration de situations où certaines méthodes d'appariement de points peuvent échouer. ....	51
<b>Figure II.12 :</b>	Mise en correspondance par la méthode des cylindres généralisés.....	52
<b>Figure II.13 :</b>	Mise en correspondance en utilisant un arbre de recouvrement minimum. ....	53

<b>Figure II.14 :</b>	Méthode de triangulation de deux contours dite "optimale".....	56
<b>Figure II.15 :</b>	Méthode de triangulation de deux contours dite "heuristique".....	57
<b>Figure II.16 :</b>	Certaines surfaces non désirables peuvent être obtenues par les méthodes optimales et heuristiques (D'après [CHSE 78])......	58
<b>Figure II.17 :</b>	Méthode de reconstruction par appariement de points caractéristiques (D'après [TIPP 76])......	58
<b>Figure II.18 :</b>	Principe d'interpolation linéaire de portions de contours dans les zones de variations de la morphologie de deux contours (D'après [KAWA 88])......	60
<b>Figure II.19 :</b>	Principe de la méthode proposée par Ekoule et al. [EKPE 91].....	61
<b>Figure II.20 :</b>	Dans cet exemple, le positionnement judicieux des différentes sections (ici des rotations) permet une reconstruction plus "harmonieuse" de l'objet.....	61
<b>Figure II.21 :</b>	La ligne médiane est l'approximation de l'axe médian de la forme (figure A). Elle permet de mettre en correspondance les contours de deux formes voisines (figure B), d'après [ROLL 91].....	63
<b>Figure II.22 :</b>	Méthodes de gestion de branchements simples (D'après [CHSE 78] modifié).....	65
<b>Figure II.23 :</b>	Les méthodes de branchement de type "Christiansen" produisent des surfaces non réalistes.....	66
<b>Figure II.24 :</b>	Ajout d'un contour interpolé par la méthode de [EKPE 91].....	66
<b>Figure II.25 :</b>	Méthode de reconstruction de contours emboîtés par la technique de "lancer de rayon". (D'après [ZYJO 87])......	67
<b>Figure II.26 :</b>	Les différentes étapes de la méthode de reconstruction proposée par [BASH 94].....	68
<b>Figure II.27 :</b>	Procédure de branchement simple dans la méthode exposée par [CHPA 94].....	69
<b>Figure II.28 :</b>	Association des différents points de deux chaînes polygonales A et B. Chaque vecteur représente un champ de force utilisé dans l'interpolation élastique.....	70
<b>Figure II.29 :</b>	Résultat de l'interpolation entre une forme origine et une forme cible (D'après [LILI 87])......	71
<b>Figure II.30 :</b>	Extraction d'un squelette dans les pseudo zones différences de deux contours consécutifs, d'après [YOSH 92]. .....	72
<b>Figure II.31 :</b>	Comparaison entre les masques utilisés par la distance $d_g$ et par la distance de chanfrein. La distance de chanfrein permet de diminuer l'erreur par rapport à la distance Euclidienne (figure A), et de définir des transformées en distance qui approximent mieux la distance Euclidienne.....	72
<b>Figure II.32 :</b>	Résultats de la construction des coupes intermédiaires à l'aide de la distance de chanfrein (figure A), et empilement de ces coupes pour définir l'objet de manière volumique (figure B) (d'après [MOUS 93]). .....	73
<b>Figure II.33 :</b>	La détermination des noeuds situés à l'intérieur des contours permet de prendre en compte l'information topologique associée à la section de l'objet. ....	74
<b>Figure II.34 :</b>	Construction des squelettes interne et externe des contours d'une section, et projection de ces points sur la section voisine, où le diagramme de Voronoï est mis à jour, d'après [GEIG 93]......	75
<b>Figure II.35 :</b>	Stade d'élimination des connexions non solides, d'après [GEIG 93].....	75

### CHAPITRE III :

<b>Figure III.1 :</b>	Projection des deux sections sur un même plan, et extraction des zones différences.....	80
<b>Figure III.2 :</b>	La surface de l'objet se projette entièrement dans les zones différences.....	81
<b>Figure III.3 :</b>	Triangulation d'une zone différence simple composée de deux chaînes ChA et ChB.....	82
<b>Figure III.4 :</b>	Exemple de zones différences complexes. ....	82
<b>Figure III.5 :</b>	Exemple de triangulation de zones complexes. Dans le cas B, la surface s'auto-intersecte à deux endroits. Une simple triangulation ne suffit donc pas pour générer une surface correcte de l'objet.....	83
<b>Figure III.6 :</b>	Construction de chaînes intermédiaires dans une zone différence afin de permettre une triangulation correcte des différentes portions de contours.....	84
<b>Figure III.7 :</b>	Résultat de la triangulation de la zone différence. Les différents contours intermédiaires sont projetés à des altitudes intermédiaires à celles des 2 chaînes origines.....	85
<b>Figure III.8 :</b>	Illustration des principaux stades de la méthode de reconstruction 3D.....	86

## CHAPITRE IV :

<b>Figure IV.1 :</b>	Diagramme de Voronoï et Triangulation de Delaunay d'un ensemble de points.....	90
<b>Figure IV.2 :</b>	Les différents types d'arêtes de Voronoï entre des segments.....	91
<b>Figure IV.3 :</b>	Diagramme de Voronoï interne d'un polygone, et recherche de chemin entre deux sommets à travers le diagramme. Chaque sommet concave induit deux types de chemin. (D'après [LEE 82] modifié).....	92
<b>Figure IV.4 :</b>	Axe médian du polygone dont le diagramme de Voronoï est illustré figure IV.3. L'axe médian ne contient aucun bissecteur du diagramme de Voronoï issu des sommets concaves.....	93
<b>Figure IV.5 :</b>	Détermination de l'axe médian d'un polygone par propagation vers l'intérieur de la forme.....	94
<b>Figure IV.6 :</b>	Illustration des différents types de points de rupture.....	94
<b>Figure IV.7 :</b>	Approximation des portions de parabole par un segment linéaire.....	96
<b>Figure IV.8 :</b>	Approximation de l'axe médian de segments non-linéaires par sur-échantillonnage des points et calcul du diagramme de Voronoï de ces points. (D'après [SUGI 93]).....	96
<b>Figure IV.9 :</b>	Approximation de l'axe médian d'un polygone à partir de la triangulation de Delaunay de ses sommets. Les centres des cercles circonscrits aux triangles correspondent aux sommets de l'approximation de l'axe médian.....	97
<b>Figure IV.10 :</b>	Approximation de l'axe médian par ajout de points sur la frontière du polygone. Sur cet exemple deux points suffisent à contenir le squelette à l'intérieur de la forme. (D'après [GEIG 93]).....	97
<b>Figure IV.11 :</b>	Méthode de construction du graphe linéaire proposé par [BOOK 79]. La figure A illustre la connexion de trois branches du squelette. Lorsque les bissecteurs s'intersectent avant de rencontrer une branche de l'axe médian, le graphe perd sa continuité (figure B).....	98
<b>Figure IV.12 :</b>	Un front de croissance à la distance $h$ du polygone (figure A), et un front d'onde à la distance $h$ de ce même polygone (figure B).....	101
<b>Figure IV.13 :</b>	Exemple d'une forme $F$ composée de trois contours orientés, dont un trou.....	102
<b>Figure IV.14 :</b>	Définition des notions de distance $D(p, e_i)$ et de "distance Euclidienne" $d(p_2, e_i)$ .....	103
<b>Figure IV.15 :</b>	Orientations des demi-droites (A) et des segments (B), bissectrices des arêtes $e_i$ et $e_j$ .....	104
<b>Figure IV.16 :</b>	Cas "A" des situations locales.....	105
<b>Figure IV.17 :</b>	Construction des arêtes parallèles $e'_{i-1}$ , $e'_i$ et $e'_{i+1}$ pour une distance inférieure à $h_i$ de $F$ .....	106
<b>Figure IV.18 :</b>	Construction des arêtes parallèles $e'_{i-1}$ , $e'_i$ et $e'_{i+1}$ pour une distance de $F$ égale à $h_i$ .....	106
<b>Figure IV.19 :</b>	Construction des arêtes parallèles $e'_{i-1}$ et $e'_{i+1}$ à une distance de $F$ égale à $h_i - h_1$ .....	107
<b>Figure IV.20 :</b>	Construction des arêtes de $G(F, h_1)$ directement à partir de $F$ . Le contour parallèle n'est pas valide puisque l'arête $e'_i$ n'est pas strictement parallèle à $e_i$ , de plus, dans le premier cas, le contour s'auto-intersecte.....	107
<b>Figure IV.21 :</b>	Construction des arêtes de $G(F, h)$ à une distance $h$ inférieure à $h_i$ de $F$ (figure A), et à une distance $h$ égale à $h_i$ de $F$ (figure B).....	108
<b>Figure IV.22 :</b>	Devenir du contour parallèle $G(F, h_i)$ en fonction de la connexité des contours.....	108
<b>Figure IV.23 :</b>	Construction des arêtes de $G(F, h_i)$ à une distance $h$ supérieure à $h_i$ de $F$ . Dans le cas où $G(F, h_1)$ est directement construit à partir de $F$ (figure B), le résultat n'est pas valide.....	109
<b>Figure IV.24 :</b>	Construction des arêtes de $G(F, h)$ à une distance $h$ inférieure à $h_i$ de $F$ (figure A), et à une distance $h$ égale à $h_i$ de $F$ (figure B).....	110
<b>Figure IV.25 :</b>	Un contour construit à une distance $h$ de $F$ supérieure à $h_i$ ne peut pas être valide.....	111
<b>Figure IV.26 :</b>	Illustration de la preuve du Lemme 5.....	112
<b>Figure IV.27 :</b>	Conditions d'existence d'un point de rupture de type C.....	114
<b>Figure IV.28 :</b>	Un sommet concave ne peut induire qu'un seul point de rupture de type C.....	115
<b>Figure IV.29 :</b>	Modification de l'ensemble $S$ si le point $R$ de $h_{\min}$ est un point de rupture de type B.....	116
<b>Figure IV.30 :</b>	Modification de l'ensemble $S$ si le point $R$ de $h_{\min}$ est un point de rupture de type C.....	117
<b>Figure IV.31 :</b>	Croissance vers l'extérieur d'une forme $F$ . La figure illustre les contours parallèles rencontrés aux différents points de rupture.....	118
<b>Figure IV.32 :</b>	Illustration de la notion de lame cristalline relative à une arête de la forme $F$ .....	119
<b>Figure IV.33 :</b>	Évolution des lames cristallines au cours de la croissance.....	121

<b>Figure IV.34 :</b>	Configuration locale autour d'un point de rupture de type C. La figure A illustre l'impossibilité pour que $B(i, j+1)$ soit à gauche de $D_i$ (dans ce cas I est de type B). La figure B montre la seule possibilité pour un point de rupture de type C où $B(i, j+1)$ et $B(j, i)$ sont respectivement à droite et à gauche de $\Delta_i$ .	123
<b>Figure IV.35 :</b>	Configuration locale autour d'un point de rupture où $A(j, i)$ est à droite de $\Delta_i$ . Ce cas de figure induit un point de rupture de type B et non de type C.	123
<b>Figure IV.36 :</b>	Configuration locale autour d'un point de rupture de type B. Les bissectrices $B(i-1, i+1)$ et $B(i-1, i)$ ne peuvent être respectivement qu'à gauche et à droite de $\Delta_{i-1}$ .	124
<b>Figure IV.37 :</b>	Réseaux bissecteurs interne et externe d'une forme polygonale F. Un contour parallèle $G(F, h)$ à la distance h de F. Mise en évidence de deux cellules $V_i(i)$ et $V_e(j)$ appartenant respectivement au réseau bissecteur interne et externe de F.	126
<b>Figure IV.38 :</b>	Illustration d'une combinaison de bissectrices de F qui <b>n'est pas</b> le réseau bissecteur de F. $G(F, h)$ n'est pas valide. Les lames cristallines de $e_i$ ne sont pas connexes, la cellule $V(i)$ n'est donc pas monotone par rapport à $e_i$ .	126
<b>Figure IV.39 :</b>	Il est suffisant de conserver dans l'ensemble S que les points de rupture de type 1-1. Dans les trois cas, b ne peut pas exister par la suite et il est remplacé par $b_1$ . A2 : Comme c est maintenant 1-1 il peut être inséré dans l'ensemble S. B2 et C2 : $b_1$ est inséré dans S. c étant toujours de type 2-1, il n'intègre pas S.	130
<b>Figure IV.40 :</b>	Il est suffisant de conserver dans l'ensemble S que les points de rupture de type 1-1. Dans les trois cas, b ne peut pas exister par la suite et il est remplacé par $b_1$ . B2 : Comme $b_1$ n'est pas de type 1-1, aucun point n'est ajouté dans S. C2 : $b_1$ est inséré dans S alors que c, maintenant de type 2-1, en est retiré.	131
<b>Figure IV.41 :</b>	Bien que R ne corresponde pas à tous les critères nécessités par le lemme 6, il doit quand même être considéré car l'évolution du réseau peut le réactiver.	132
<b>Figure IV.42 :</b>	Arbre de fusion d'un ensemble de $2^w$ chaînes initiales.	134
<b>Figure IV.43 :</b>	Décomposition initiale du polygone en chaînes convexes et concaves.	135
<b>Figure IV.44 :</b>	Illustration de trois étapes de la procédure de fusion.	136
<b>Figure IV.45 :</b>	Importance de conserver la monotonie des cellules lors de la construction partielle du réseau bissecteur de deux chaînes (figure B). La procédure de fusion peut être mise en échec dans le cas contraire (figure A).	138
<b>Figure IV.46 :</b>	Toutes les bissectrices testées lors de la recherche du point I ne peuvent pas être détruites car elles peuvent engendrer un point d'intersection lors de la prochaine étape. Sur cet exemple seule $B(3, 11)$ peut être éliminée puisqu'elle est entièrement située à gauche de la normale à $e_3$ passant par R.	142
<b>Figure IV.47 :</b>	Les figures A et B illustrent le choix des arêtes initiales pour la fusion d'un nouveau trou. La figure C montre le réseau bissecteur final de la forme, et on peut voir 31 contours parallèles tracés à partir du réseau bissecteur sur la figure D.	144
<b>Figure IV.48 :</b>	Procédure de test permettant de savoir si une arête d'un trou peut partager une bissectrice commune avec une arête du réseau bissecteur déjà construit.	145
<b>Figure IV.49 :</b>	Difficulté de choisir un sommet concave initial (figure A), et possibilité d'effectuer deux "demi-fusions" lors de la construction d'un réseau bissecteur externe (figure B).	148
<b>Figure IV.50 :</b>	Simplification de la procédure de construction d'un réseau bissecteur externe par ajout d'un contour externe situé à l'infini (Pour les besoins de l'illustration le rectangle choisi est trop petit. Ainsi, il ne permet pas de déterminer le réseau bissecteur complet.)	149

## CHAPITRE V :

<b>Figure V.1 :</b>	Quand la connaissance de structure de l'objet est très forte, les méthodes utilisant un ajustement "aveugle" (figure C) ne permettent pas toujours d'obtenir les résultats souhaités par l'utilisateur (figure B).	153
<b>Figure V.2 :</b>	Problèmes pouvant survenir lors de la mise en correspondance par superposition de formes filaires.	154
<b>Figure V.3 :</b>	Un ajustement même rapide peut améliorer de manière importante le résultat.	156
<b>Figure V.4 :</b>	L'ajout de coupes intermédiaires permet d'exclure les problèmes d'auto-intersection de la surface.	157
<b>Figure V.5 :</b>	La mesure de la déformation est le critère utilisé par la fonction de coût.	160

<b>Figure V.6 :</b>	Schéma associatif des points de deux chaînes.....	160
<b>Figure V.7 :</b>	Les différents sommets du réseau bissecteur caractéristiques d'une forme. Il y a les extrémités et les sommets triples. Ces derniers sont composés des fourches (reliés à au moins deux extrémités), les sommets intermédiaires (reliés à une extrémité ou à une fourche), et les sommets principaux.....	161
<b>Figure V.8 :</b>	Résultat de l'appariement de deux graphes du réseau bissecteur par la méthode de programmation dynamique.....	162
<b>Figure V.9 :</b>	Principes de transformation de chaque contour en chaîne linéaire ne comportant au plus qu'un seul cycle.....	163

## CHAPITRE VI :

<b>Figure VI.1 :</b>	Illustration de la notion de chaînes et de zones différences.....	165
<b>Figure VI.2 :</b>	Les états de la droite de balayage après insertion de différents sommets.....	167
<b>Figure VI.3 :</b>	Les types de sommets, et la tructure modifiée du x-ordre.....	171
<b>Figure VI.4 :</b>	Illustration des types permettant l'extraction simultanée des formes différences.....	172
<b>Figure VI.5 :</b>	Cas d'un sommet de naissance provoquant la création d'un nouvel objet.....	174
<b>Figure VI.6 :</b>	Un sommet de mort peut provoquer la fermeture d'un contour. Il peut soit créer une nouvelle forme (A), soit un nouveau trou (B). .....	175
<b>Figure VI.7 :</b>	Influence des sommets d'intersection sur la création de nouveaux générateurs et de nouveaux objets. ....	176
<b>Figure VI.8 :</b>	Illustration des différents types de zones différences.....	180
<b>Figure VI.9 :</b>	Différents types de zones différences : zones différences intersectées simples (1), complexes (2), trouées (3, 4), zones différences sans intersection (5, 6), et zones unicolores simples (7) et trouées (8). ....	181
<b>Figure VI.10 :</b>	Les différents types d'orientation de la surface.....	182
<b>Figure VI.11 :</b>	Correspondance entre le type de la zone différence et l'orientation de la surface. C1 et C2 sont des zones différences de même type (SB-SA), mais dont le contour externe est d'origine différente. Dans les deux cas la surface a une orientation inverse.....	182
<b>Figure VI.12 :</b>	Agencement et sens de parcours des bissectrices d'un réseau bissecteur.....	184
<b>Figure VI.13 :</b>	Les deux types de déplacement dans le réseau bissecteur à partir des bissectrices. ....	185
<b>Figure VI.14 :</b>	Les différentes étapes de l'interpolation dans une zone différence bicolore non-intersectée.....	187
<b>Figure VI.15 :</b>	Les différentes étapes de l'interpolation dans une zone différence bicolore intersectée. La forme générale est la même que celle de la figure VI.14, ce qui permet de comparer les résultats. ....	189
<b>Figure VI.16 :</b>	Interpolation dans une zone unicolore lors de la construction des zones intermédiaires.....	191
<b>Figure VI.17 :</b>	Concaténation de l'ensemble des chaînes et des contours intermédiaires interpolés. Positionnement en Z de la forme SI intermédiaire.....	193
<b>Figure VI.18 :</b>	Test permettant de comparer de vraies sections initiales (ligne B) avec des sections intermédiaires interpolées (ligne D) à partir des deux coupes extrêmes (ligne A et C).....	193
<b>Figure VI.19 :</b>	Exemple d'interpolation de 7 coupes entre deux sections initiales.....	194
<b>Figure VI.20 :</b>	Interpolation globale des zones différences unicolores. Cela permet de contrôler la hauteur de l'objet en fonction de son empattement. ....	195
<b>Figure VI.21 :</b>	Les arêtes $e_6, e_7, \dots, e_{12}$ n'ont pas de segments homologues sur la chaîne intermédiaire. Une nouvelle interpolation peut être imaginée entre la chaîne intermédiaire et la portion de contour comportant les arêtes $e_4 - e_{15}$ .....	196
<b>Figure VI.22 :</b>	Résultat de la squelettisation des 3 zones différences de deux formes SA et SB.....	198
<b>Figure VI.23 :</b>	Les différentes étapes de la triangulation de la zone différence Z1 de la figure VI.22.....	199
<b>Figure VI.24 :</b>	Les différentes étapes de la triangulation d'une zone différence bicolore "complexe".....	201
<b>Figure VI.25 :</b>	La reconstruction de la figure B permet de mieux prendre en compte la physionomie du contour. ....	202
<b>Figure VI.26 :</b>	Cohérence de la triangulation aux environs des points d'intersection entre sections voisines. (Par souci de clarté, la triangulation n'est pas représentée sur les sections intermédiaires).....	204

<b>Figure VI.27 :</b> Amélioration du détail de la surface par interpolations successives dans les zones différences où certaines arêtes n'ont pas de segments homologues sur la chaîne intermédiaire.....	206
<b>Figure VI.28 :</b> Cohérence de la triangulation lorsque le niveau d'interpolation n'est pas le même dans deux zones différences adjacentes.....	206
<b>Figure VI.29 :</b> Redistribution des portions de contours intermédiaires afin de mieux répartir la déformation de la surface sur l'ensemble de la distance inter-coupe.....	207
<b>Figure VI.30 :</b> Illustration des deux stratégies possibles lors de la reconstruction des "îles". La figure C tient compte de la "profondeur" des sommets pour fixer leur altitude.....	208
<b>Figure VI.31 :</b> Corrélation entre la hauteur d'une "île" et son "diamètre". Le contour le plus "imposant" fixe la hauteur maximale de la reconstruction.....	209
<b>Figure VI.32 :</b> La suppression des petites bissectrices internes, et donc l'augmentation du degré de chaque noeud, implique de vérifier l'appartenance des arêtes mères lors du parcours des bissectrices. Dans le cas contraire la bissectrice B(5, 4) pourrait être à tort retenue.....	210
<b>Figure VI.33 :</b> Suppression des petites bissectrices internes avec un alpha de 0,3.....	211
<b>Figure VI.34 :</b> Suppression des bissectrices internes unicolores dans les zones de petites variations morphologiques. Le résultat obtenu dans les figures A3 et B3 permet de conserver une meilleure continuité de la surface de l'objet reconstruit.....	212

## CHAPITRE VII :

<b>Figure VII.1 :</b> Exemple de triangulation directe dans les zones de faibles variations morphologiques. La triangulation est déduite des relations de chaque bissectrice interne avec les différentes arêtes.....	216
<b>Figure VII.2 :</b> A : Exemple de reconstruction d'un coeur B : Exemple de reconstruction d'une tête.....	218
<b>Figure VII.3 :</b> A : Maillages du coeur et de la tête issus de la méthode de reconstruction classique B : Exemple de reconstruction d'un coeur et d'une tête en supprimant les petites bissectrices et en triangulant directement les zones de faibles variations morphologiques.....	219
<b>Figure VII.4 :</b> A : Reconstruction d'un exemple synthétique avec 1 interpolation..... E : Reconstruction d'un exemple synthétique avec 7 niveaux d'interpolation. La différence de la position des zones de branchements et l'atténuation des variations morphologiques est à remarquer.....	220 221
<b>Figure VII.5 :</b> A : Visualisation de l'exemple de la figure VII.4A B : Visualisation de l'exemple de la figure VII.4B.....	222
<b>Figure VII.6 :</b> A : Exemple de reconstruction de la mine de Hajar au Maroc avec 1 niveau d'interpolation. B : Exemple de reconstruction de la mine de Hajar au Maroc avec 3 niveaux d'interpolation...	223
<b>Figure VII.7 :</b> A : Visualisation de l'exemple de la figure VII.6A. B : Visualisation de l'exemple de la figure VII.6B.....	224
<b>Figure VII.8 :</b> Maillage avec triangulation directe et suppression des petites bissectrices dans le cas d'un bassin humain.....	225
<b>Figure VII.9 :</b> Maillage avec triangulation directe et suppressions des petites bissectrices dans le cas d'un poumon humain.....	225
<b>Figure VII.10 :</b> A : Vue de face de la reconstruction du bassin. B : Vue de dos de la reconstruction du bassin.....	226
<b>Figure VII.11 :</b> Exemple de reconstruction de poumons humains.....	227
<b>Figure VII.12 :</b> Exemple de reconstruction de sections de nodules de Barytine.....	227
<b>Figure VII.13 :</b> Exemple de reconstruction d'un contour isolé.....	227
<b>Figure VII.14 :</b> Évolution des temps d'exécution en fonction du nombre de triangles construits. A gauche sans approximation, à droite en supprimant les petites bissectrices et en triangulant directement les zones différences simples (cf. tableaux VII.1 à 5).....	229
<b>Figure VII.15 :</b> Exemple de construction "manuelle" d'un maillage triangulaire (B) d'une forme polygonale s'appuyant sur les contours parallèles (A) tracés à partir du réseau bissecteur de la forme. De la même manière un maillage quadrangulaire peut-être imaginé.....	232



<b>Figure VII.16 :</b>	Vue en coupe 2D de la construction du DVG 3D d'un ensemble de sections intersectantes (A), et de la projection des différents contours sur les plans bissecteurs relatifs aux arêtes considérées (B).....	233
<b>Tableau VII.1 :</b>	Exemple d'une tête : 17 coupes, 26 contours, 856 points initiaux .....	217
<b>Tableau VII.2 :</b>	Exemple d'un coeur : 29 coupes, 58 contours, 1 222 points initiaux .....	217
<b>Tableau VII.3 :</b>	Exemple de la mine de Hajar : 11 coupes, 36 contours, 636 points initiaux.....	223
<b>Tableau VII.4 :</b>	Exemple d'un bassin : 23 coupes, 85 contours, 2 067 points initiaux.....	228
<b>Tableau VII.5 :</b>	Exemple d'un poumon : 34 coupes, 86 contours, 3 016 points initiaux .....	228
<b>Tableau VII.6 :</b>	Temps d'exécution de l'exemple de la mine de Hajar avec un nombre d'interpolation différent. (temps CPU sur SUN IPX).....	230
<b>Tableau VII.7 :</b>	Temps d'exécution des différents exemples avec le logiciel "nuages" sur SUN IPX.....	231



## - RÉFÉRENCES -

- [ALYA 90] Alt H., Yap C.K., Algorithmic Aspects of Motion Planning : a Tutorial, *Algorithms Review*, Vol. 1, N° 2, May 1990.
- [AMBO 90] Amet H., Boissonnat J.D., Schott R., Calcul Dynamique du Diagramme de Voronoï d'un Ensemble de Segments, Journées de Géométrie Algorithmique, INRIA Sophia Antipolis, 18-20 Juin 1990.
- [ARON 91] Aronov B., On the Geodesic Voronoï Diagram of Point Sites in a Simple Polygon, *Algorithmica*, Vol. 6, pp. 109-140, 1991,.
- [ATMO 93] Attali D., Montanvert A., Squelettes et Diagrammes de Voronoï, Rapport de Recherche N° RR 922-I, IMAG, Grenoble, Décembre 1989.
- [AURE 91] Aurenhammer F., Voronoi diagrams- A Survey of a Fundamental Geometric Data Structure, *ACM Comp. Surv.*, Vol. 23, N° 3, pp. 346-405, , September 1991.
- [AVBO 94] Avnaim F., Boissonnat J-D., Devillers O., Preparata F.P., Yvinec M., Evaluating Signs of Determinants using Single-precision Arithmetic, Rapport de Recherche INRIA N° 2306, 23 p., Juillet 1994.
- [BASH 94] Barequet G., Sharir M., Piecewise-Linear Interpolation between Polygonal Slices, Proc. 10th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom. pp. 93-102, 1994.
- [BEJA 93] Benouamer M., Jaillon P., Michelucci D., Moreau J-M., A Lazy Solution to Imprecision in Computational Geometry. In Proc. 5th Canadian Conf. Comput. Geom., Waterloo, Canada, pp. 73-78, 1993.
- [BEOT 79] Bentley J.L., Ottmann T.A., Algorithms for reporting and compting geometric intersections, *IEEE Trans. Comp. Graph.*, v. C-28 N°9, pp. 643-647, Sept. 1979.
- [BLUM 67] Blum H., A transformation for extracting new descriptors of shape, Proc. Symp. Models for Perception of Speech and Visual Form, W; Whaten-Dunn ed. Cambridge, MA: M.I.T. Press, pp. 362-380, 1967.
- [BLUM 73] Blum H, Biological shape and visual science (part I), *J. Theor. Biol.*, 338, pp. 205-287, 1973.
- [BLUM 78] Blum H., Nagel R.N., Shape Description Using Weighted Symmetric Axis Features, *Pattern Recognition*, Vol. 10, pp. 167-180, 1978.
- [BOCE 91] Boissonnat J-D., Cérézo A., Devillers O., Teillaud M., Output Sensitive Construction of the 3D Delaunay Triangulation of Constrained Sets of Points, INRIA, Rap. Rech. N° 1415, 23 p., April 1991
- [BOGE 92] Boissonnat J-D., Geiger B., Three dimensional reconstruction of complex shapes based on the Delaunay triangulation, INRIA, Rap. Rech. N° 1697, 22 p., April 1992
- [BOIS 85] Boissonnat J-D., Reconstruction of Solids, Proc 1st ACM Symp. on Comp. Geometry, Baltimore, pp. 46-54, 1985.
- [BOIS 88] Boissonnat J-D., Shape reconstruction from planar cross-sections, *Computer Vision, Graph. & Image Proc.*, 44, pp. 1-29, 1988.
- [BOOK 79] Bookstein F.L., The line-skeleton, *Comp. Graph. & Image Proc.*, 11, pp. 123-137, 1979.
- [BRHE 84] Brassel K.E., Heller M., The Construction of Bisector Skeletons for Polygonal Network, Proc. Int. Symp. on Spatial Data Handling, Zurich, 20 - 24 August, Vol. 1 pp. 117-126, 1984,.

- [BRAL 91] Brandt J.W., Algazi V.R., Computing a Stable, Connected Skeleton from Discrete Data, Proc. of the IEEE Comp. Society Conf. on Comp. Vision and Pattern Recognition, p. 666-667, 1991.
- [BURR 81a] Burr D.J., A dynamic model for image registration, *CGIP*, Vol. 15, pp. 102-112, 1981.
- [BURR 81b] Burr D.J., Elastic Matching of Lines Drawings. *IEEE T-PAMI*, Vol. 3, N° 6, pp. 708-713, Nov. 1981.
- [CADO 88] Canny J., Donald B., Simplified Voronoi Diagrams, *Discrete Comput. Geom.*, 3, pp. 219-236, 1988.
- [CANN 87] Canny J., Complexity of Robot Motion Planning, Ph. D. Dissertation, Comp. Science Dept., M.I.T., 1987
- [CHEA 93] Cheaito M., Approche de la Modélisation d'Objets Géologiques Déformés, Thèse Ecole des Mines de Saint-Etienne, 244 p, 20 Dec. 1993.
- [CHLI 88] Chen J.S., Lin W.C., A new surface interpolation technique for reconstructing 3-D objects from serial cross-sections, 9th ICPR, Rome, pp. 1100-1102, Nov. 1988.
- [CHMO 91] Chassery J-M., Montanvert A., Géométrie Discrète en Analyse d'Image, Éditions Hermès, 1991.
- [CHPA 94] Choi Y.K., Park K.H., A Heuristic Triangulation Algorithm for Multiple Planar Contours Using an Extended Double Branching Procedure, *The Visual Computer*, Vol. 10, pp. 372-387, 1994.
- [CHSE 78] Christiansen H.N., Sederberg T.W., Conversion of complex contour line definition into polygonal element mozaic, *Comput. Graph.*, 12-3, pp. 187-192, 1978.
- [CHSL 92] Chrysanthou Y., Slater M., Computing Dynamic Changes to BSP Trees. QMW, University of London, Eurographics, Vol. 11, N° 3, pp. 321-332, 1992.
- [CLST 94] Cloppet F., Stamon G., Segmentation Coopérative Région/Contour en Vue d'une Application Permettant de Caractériser l'Evolution Morphologique de Cellules en Culture, Colloque AGI'94 - Automatique, Génie Informatique, Image, pp. 377-380, Poitiers 2-3 Juin 1994.
- [COBA 81] Cook P.N., Batnitsky S. & Al., Three-Dimensional Reconstruction from Serial Sections for Medical Applications, Proc. 14th Hawaii Intern. Conf. on System Sciences, 2, pp. 358-389, 1981.
- [COLL 94] Collin B., Contribution à l'Analyse Automatisée de la Déformation, Thèse de l'Université d'Orsay 204 p, 1994.,
- [CROM 87] Cromley R.G., Calculating Bisector Skeletons Using a Thiessen Data Structure, Proc. AUTOCARTO 8 (Automatics Cartography), Baltimore, MD, pp. 719-724, March 29-April 3, 1987.
- [DOLL 94] Dolliazal M., From Cross Sections to Surfaces, Séminaire Gocad, June 1994.
- [EKPE 91] Ekoule A.B., Peyrin F.C., Odet C.L., A triangulation algorithm from arbitrary shaped multiple planar contours, *ACM Trans. Graph.*, 10-2, pp. 182-199, April 1991.
- [EUTO 94] Eu D., Toussaint G.T., On Approximating Polygonal Curves in Two and Three Dimensions, *CVGIP*, Vol. 56, N° 3 pp. 231-246, May 1994.,
- [FARI 93] Farin G., Curves and Surfaces for CADG, Academic Press, 473 p, 1993.
- [FORT 87] Fortune S., A Sweep-line Algorithm for Voronoi diagrams, *Algorithmica*, Vol. 2, pp. 153-174, 1987.
- [FOMI 91] Fortune S., Milenkovic V., Numerical Stability of Algorithms for Lines Arrangements. In Proc. 7th Annu. ACM. Symp. Comput. Geom., pp. 334-341, 1991.

- [FOVA 93] Fortune S., Van Wyk C.J., Efficient Exact Arithmetic for Computational Geometry. In proc. 9th Annu. ACM Symp. Comput. Geom., pp. 163-172, 1993.
- [FRGA 90] Froidevaux C., Gaudel M.C., Soria M., Types de Données et Algorithmes, Mc Graw Hill, 1990.
- [FUKE 77] Fuchs H., Kedem Z.M., Uselton S.P., Optimal surface reconstruction from planar contours, *ACM*, 20-10, pp. 693-702, Oct. 1977.
- [GADE 82] Ganapathy S., Dennehy T.G., A new general triangulation method for planar contours, *Comput. Graph.*, 16-3, pp. 69-75., 1982.
- [GEIG 93] Geiger B., Three-Dimensional Modeling of Human Organs and its Application to Diagnosis and Surgical Planning, INRIA, Rapport de Recherche N° 2105, 119 p., November 1993
- [GEOR 90] Georges P-L., Génération Automatique de Maillages : Application au Calcul par Éléments Finis, Collection RMA, 1990.
- [GIOR 93] Gitlin C., O'Rourke J., Subramanian V. On Reconstructing Polyedra from Parallel Slices. Technical Report 025, Smith College, Northampton MA, Dept. Computer Science, 1993.
- [GOCH 91] Gordon D., Chen S., Front to Back Display of BSP Trees, *IEEE Comput. Graph. Appl.*, Vol. 11, N° 5, pp. 79-85., Sept. 91.
- [GREM 92] Gremillet P., Reconstruction et Visualisation de Surfaces et de Volumes en Microscopie Electronique à Transmission et en Microscopie Confocale, Thèse Université de Saint-Etienne, 87 p., 1992.
- [HOFF 89] Hoffmann C.M., Geometric and Solid Modeling : an Introduction, Morgan Kaufmann Publishers, 338 p., 1989.
- [HUCH 89] Hu H.T., Chassery J.M., Diagrammes de Voronoi Généralisés : Premiers Résultats, Rapport de Recherche N° RR 799-M, IMAG, Grenoble, Décembre 1989.
- [JOCH 94] Jones M. K., Chen M., A New Approach to the Construction of Surfaces from Contour Data, *EUROGRAPHICS '94*, Vol. 13 N° 3, pp. 75-84., 1994.
- [KAWA 88] Kaneda K., Wakasu Y., Nakame E., Accurate reconstruction of a 3D object composed of multiple surfaces, *Proc. PIXIM*, pp. 15-25, 1988.
- [KAWI 87] Kass M., Witkin A., Terzopoulos D., Snakes : Active Contour Models, *Proc. First Int. Conf. on Comp. Vision*, London, pp. 259-268, June 1987.
- [KEPP 75] Keppel E., Approximating complex surfaces by triangulation of contour lines, *IBM J. Res. Dev.*, 19, pp. 2-11, 1975.
- [KESI 88] Kehtarnavaz N., Simar L.R., De Figueiredo R.J.P., A Syntactic / Semantic Technique for Surface Reconstruction from Cross-Sectional Contours. *Computer Vision Graphics and Image Processing*, Vol 42, pp. 399-409, 1988
- [KIRK 79] Kirkpatrick D.G., Efficient Computation of Continuous Skeletons, *Proc. 20th Annu. Symp. Found. Computer Science*, pp. 18-27, Oct. 1979.
- [KLEI 89] Klein R., Concrete and Abstract Voronoi Diagrams, *Lect. notes in Comput. Sc.*, Vol. 400, Springer-Verlag, 167p., 1989.
- [KLWO 88] Klein R., Wood D., Voronoi Diagrams Based on General Metrics in the Plane, *proc. 5th Sympos. Theoret. Aspects Comput. Sci. (STACS)*, Vol. 294, pp. 281-291, Pub. Springer-Verlag, 1988.
- [KOCA 94] Konik H., Calonnier M., Laget B., Critères extraits des cellules de Voronoi pour l'analyse d'image, *AGI'94, Colloque Automatique Génie informatique Image*, pp. 325-328, Poitiers 2-3 Juin 1994.

- [LACO 93] Lazarus F., Coquillard S., Jancène P., Interactive Axial Deformations, Rapport de Recherche INRIA N°1891, 14 p, Avril 1993.
- [LAFF 72] Laffitte P., Traité d'informatique géologique, Masson et Cie Eds., 1972.
- [LEE 80] Lee D.T., Two-Dimensional Voronoi Diagram in the Lp-Metric, *J. of the A. C. M.*, Vol. 27, N° 4, pp. 604-618, October 1980,.
- [LEE 82] Lee D.T., Medial axis transformation of a planar shape, *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. T-PAMI-4, pp. 363-369, July 1982.
- [LEDR 81] Lee D.T., Drysdale R.L., Generalization of Voronoi diagrams in the plane, *SIAM J. Comput.*, 10, pp. 363-369, Feb. 1981.
- [LILI 87] Lin W. C., Liang C.C., Dynamic elastic interpolation for 3-D object reconstruction from serial cross-sectional images, Fall Joint Comp. Conf., Dallas, Texas, Proc. ACM-IEEE, 1987, pp. 620-627, Oct 25-29 1987.
- [LOCL 87] Lorensen W.E., Cline H.E, Marching Cubes: A Hight Resolution 3D Surface Construction Algorithm, *SIGGRAPH Computer Graphics*, Vol. 21, N° 4 pp. 163-169, Jul. 1987,.
- [LOMA 92] Lounsbery M., Mann S., DeRose T., Parametric Surface Interpolation, *IEEE Comput. Graph. & Appl.*, September 1992, pp. 45-52.
- [MALL 89] Mallet J.L., Discrete Smooth Interpolation, *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 8, N° 2, pp. 121-144, April 1989.
- [MANT 88] Mäntylä M., An Introduction to Solid Modelling, Computer Sciences Press, 401 p., 1988.
- [MATH 62] Matheron G., Traité de Géostatistique appliquée. 1 (1962), 2 (1963). Editions Technip, Paris.
- [MAYO 93] Mayoraz R., Modélisation et Visualisation infographique Tridimensionnelle de Structures et Propriétés Géologiques. Thèse Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1993.
- [MESA 87] Meshkat S.N. V., Sakkas C.M., Voronoi Diagram for Multiply-connected Polygonal domains. II : Implementation and Application, *IBM J. Res. Develop.*, Vol. 31, N° 3, May 1987.
- [MESK 92] Meyers D., Skinner S., Sloan K.R., Surfaces from contours, *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 11, N°3, pp. 228-258, July 1992.
- [MICH 87] Michelucci D., Les représentations par frontière: quelques constructions; difficultés rencontrées, Thèse de l'Ecole des Mines de Saint-Etienne, 1987.
- [MONT 68] Montanari U., A Method for Obtaining Skeletons Using a Quasi-Euclidean Distance, *J. of the A. C. M.*, Vol. 15, N° 4, pp. 600-624, October 1968.
- [MONT 69] Montanari U., Continuous skeletons for digitized images, *J. ACM*, 16-4, pp. 534-549, Oct. 1969.
- [MORE 90] Moreau J-M., Hiérarchisation et facettisation de la représentation par segments d'un graphe planaire dans le cadre d'une arithmétique mixte, Thèse de l'Ecole des Mines de Saint-Etienne, 1990.
- [MORT 85] Mortenson M. E., Geometric Modelling, John Wiley & Sons Eds. 763 p., 1985.
- [MOUS 93] Montanvert A., Usson Y, Discrete Distances Applied to 2D Granulometry and 3D Reconstruction, Proc. of the 8th Scandinavian Conf. on Image Analysis, p. 1153-1160, May 25-28, 1993.
- [NEFA 90] Neveu M., Faudot D., 3D Modeling and Motion of Deformable Solids from 2D Images, *Eurographics'90*, Montreux, pp. 275-286, 3-7 Sept. 1990.

- [NEFA 94] Neveu M., Faudot D., Berdouri B., Recovery of 3D deformable models from Echocardiographic Images, SPIE Mathematical Models for Medical Imaging, Juillet 1994, San Diego, 10 pp.
- [NULL 95] Nullans S., Reconstruction de Coupes Incomplètes, Rapport de stage du DEA d'Informatique ULP Strasbourg, 34 p., 1995.
- [ODSH 87] O'Dunlaing C., Sharir M., Yap C., Generalized Voronoï Diagrams for a Ladder : II. Efficient Construction of the Diagram, *Algorithmica*, Vol. 2, pp. 27-59, 1987.
- [OKBO 92] Okabe A., Boots B., Sugihara K., Spatial Tessellations - Concepts and Applications of Voronoi Diagrams, John Wiley & Sons Ltd., Chichester - England, 532 p., 1992.
- [OTWI 85] Ottmann T., Widmayer P., Wood D., A Fast Algorithm for the Boolean Masking problem, *C.V.G.I.P.*, Vol. 30, pp. 249-268, 1985.
- [OROU 93] O'Rourke J., On the Scaling Heuristic for Reconstruction from Slices. Technical Report 029, Smith College, Northampton MA, Dept. Computer Science, 1994.
- [PATO 94] Payne B.A., Toga A.W., Surface Reconstruction by Multiaxial Triangulation. *IEEE Computer Graphics and Applications*, pp. 28-35, Nov 1994.
- [PEAR 88] Péroche B., Argence J., Ghazanfarpour D., Michelucci D., *La Synthèse d'Images*, Hermès, 1988.
- [PECH 93] Perrin M., Cheaito M., Bonijoly D., Turmeaux, Visualizing Multifolded and Multifaulted Terrain Geometry using Computer Graphics, *Geoinformatics*, 4 (3), pp. 189-198, 1993.
- [PEST 95] Perrin M., Stab O., Modélisation 3D en Géologie : Quelques Pistes de Reflexion, Rapport Interne CGI - CGES, Ecole des Mines de Paris, 69 p, Mai 1995.
- [PFLK 92] Pflug R., Klein H., Ramshorn Ch., Genter M., Stärk A., 3D Visualization of Geologic Structures and Processes, in Pflug R., Harbaugh J.W. ed., *Computer Graphics in Geology*, Lect. Notes in Geol. 41, Springer, pp.28-39, 1992.
- [PREP 77] Preparata F. P., The Medial Axis of a Simple Polygon, *Proc. 6th Symp. Math. Found. Comput. Sc.*, pp. 443-450, Sept. 1977.
- [PRSH 85] Preparata F.P., Shamos M.I., *Computational Geometry - an Introduction*, Springer Verlag, New-York, 399 p., 1985.
- [ROLL 91] Rolland F., Représentation tridimensionnelle et reconstruction 3D à partir de coupes 2D, Thèse Univ. J. Fourier, Grenoble I, TIM3, IMAG 185 p., 1991.
- [ROMO 89] Rolland F., Montanvert F., Chassery J.M., Reconstruction de volumes à partir de coupes sériées, *Actes PIXIM*, pp. 511-525, 1989.
- [ROMO 91] Rolland F., Montanvert F., Chassery J.M., Graph Matching for 3D Reconstruction from Serial Cross-sections using Simulated Annealing, *Proc. of the 7th Scandinavian Conf. on Image Analysis*, pp. 395-402, August 13-16, 1991.
- [SCHA 81] Schantz M., Surface definition for branching contour defined objects, *Comput. Graph.*, 15-2, pp. 242-270, July 1981.
- [SCHM 88] Schmitt M., Some Exemples of Algorithms Analysis in Computational Geometry by Means of Mathematical Morphological Techniques, In J-D Boissonnat & J-P Laumond (eds.), *Geometry and Robotics*, LNCS 391, Springer-Verlag, May 1988.
- [SEGR 92] Sederberg T.W., Greenwood E., A physically based approach to 2D shape blending, *Computer Graphics (Proc. SISGRAPH)*, pp. 25-34., 26-2 July 1992
- [SEGA 93] Sederberg T.W., Gao P., Wang G., Mu H., 2D Shape blending: An Intrinsic Solution to the Vertex Path Problem, *Computer Graphics (Proc. SISGRAPH 93, Anaheim, Calif.)*, pp.15-18., 1-6 Aug. 1993

- [SEQU 87] Sequeira J., Modélisation interactive d'objets de forme complexe à partir de données hétérogènes, Application à la représentation géométrique des organes du corps humain, Thèse de l'Université de Franche Comté - Besançon, N° 223, 1987.
- [SERR 82] Serra J., Image Analysis and Mathematical Morphology, Vol. I (1982), Vol. II (1988), Academic Press, London.
- [SLHR 81] Sloan S.W., Hrechanyk G.T., Surface reconstruction from sparse data, IEEE Conf. on Pattern Recognition and Representation of 3D scenes, Dallas, pp. 45-48, Aug. 1981.
- [SLPA 87] Sloan K.R.Jr., Painter J., From contours to Surfaces: Testbed and initial results. In proc. of CHI + GI' 87 (Toronto, Canada, April). pp.115-120, 1987.
- [SORO 81] Soroka B.I., Generalized cones from serial sections. Comput. Graph. Image Proc., 15, pp. 154-166, 1981.
- [SRNA 87] Srinivasan V., Nackman L. R., Voronoï Diagram for Multiply-connected Polygonal domains. I : Algorithm, IBM J. Res. Develop., Vol. 31, N° 3, May 1987.
- [SRNA 92] Srinivasan V., Nackman L. R., Tang J.M., Meshkat S.N., Automatic Mesh Generation Using the Symmetric Axis Transform of Polygonal Domains, proc. IEEE, Vol. 80, N°. 9, September 1992.
- [STIF 91] Stifter S., An Axiomatic Approach to Voronoï-Diagrams in 3D, J. of Comp. and Syst. Sc., Vol. 43, pp. 361-379, 1991.
- [SUGI 93] Sugihara K., Approximation of Generalized Voronoï Diagrams by Ordinary Voronoï Diagrams, CVGIP: Graphical Models & Image Processing, Vol. 55, N°. 6, pp. 522-531, 1993.
- [TIPP 76] Tipper J.C., The Study of geological Objects in Three Dimensions by the Computerized Reconstruction of Serial Sections, Journal of Geology, Vol. 84, pp. 476-484, 1976,.
- [TIPP 77] Tipper J.C., A Method and Fortran Program for the Computerized Reconstruction of Three Dimensions Objects from Serial Sections, Computers & Geosciences, Vol. 3, pp. 579-599, 1977.
- [USMO 93] Usson Y., Montanvert A., Reconstruction Tridimensionnelle à Partir des Distances Discrètes, 3ème Colloque Géométrie Discrète et Applications, Strasbourg, 10 pp., Septembre 1993.
- [WAAG 86] WangY.F., Aggarwal J.K., Surfaces Reconstruction and Representation of 3-D Scenes, Pattern Recognition, Vol. 19, N° 3, pp. 197-207, 1986.
- [WALL 91] Wallin A., Constructing Isosurface from CT Data, IEEE Comput. Graph. & Appl., pp. 28-33, November 1991.
- [WEAT 77] Weiler K., Atherton P., Hidden Surface Removal Using Polygon Area Sorting, Computer Graphics, 11, 3, pp. 214-222, 1977 ( Proc. SIGGRAPH 77).
- [WELT 93] Weltkamp R. C., 3D Computational Morphology, EUROGRAPHICS '93. Vol. 12, N° 3, pp. 115-127, 1993.
- [WEWO 93] Welzl E., Wolfers B., Surface Reconstruction Between Simple Polygons via Angle Criteria, 1st Annual European Symposium on Algorithms (ESA '93). Lectures Notes in Computer Sciences, Springer-Verlag, pp. 397-408, 1993.
- [YAP 87] Yap C.K., An  $O(n \log n)$  Algorithm for the Voronoï Diagram of a Set of Simple Curve Segments, Discrete Comput. Geom., Vol. 2, pp. 365-393, 1987.
- [YARO 90] Yao C., Rokne J., A Straightforward Algorithm for Computing the Medial Axis of a Simple Polygon, Intern. J. Math., Vol 39, pp. 51-60, 1990.



- [YOSH 92] Yoshikazu O., Three-dimensional reconstruction of pore geometry from serial sections-Image algebraic approach, in Pflug R., Harbaugh J.W. ed., Computer Graphics in Geology, Lect. Notes in Geol. 41, Springer, pp.63-76, 1992.
- [ZYJO 87] Zyda M.J., Jones A.R., Hogan P.G., Surface construction from planar contours, Comput. Graph., 11-4, pp.393-408, 1987.





# ***Reconstruction Tridimensionnelle d'Objets Complexes à l'aide de Diagrammes de Voronoï Simplifiés : Application à l'Interpolation 3D de Sections Géologiques***

## **Résumé :**

Nous nous intéressons au problème de la reconstruction tridimensionnelle d'objets complexes à partir de coupes sériées.

Le premier chapitre du mémoire s'attache à montrer l'intérêt de mettre à la disposition de la modélisation géologique 3D un ensemble d'outils variés et notamment des méthodes d'interpolation et de reconstruction adaptées. Le second chapitre pose la problématique générale de la reconstruction 3D et propose un état de l'art sur les méthodes existantes. Ces deux chapitres composent la première partie du manuscrit.

Dans la deuxième partie du mémoire nous proposons une nouvelle méthode de reconstruction 3D qui permet de traiter de manière simple et automatique l'ensemble des problèmes de topologie (trous, branchements multiples, contours isolés). Elle s'appuie sur la construction adaptative de coupes intermédiaires par interpolation entre les sections initiales (chapitre 3). Ce processus utilise un diagramme de Voronoï généralisé simplifié, le réseau bissecteur, comme outil d'interpolation 2D. Nous fournissons une description géométrique complète du réseau bissecteur 2D et nous montrons que sa complexité algébrique est la même que celle des éléments qui permettent de le calculer (segments en 2D, portions de plans en 3D). Nous proposons ensuite deux algorithmes de construction des réseaux bissecteurs interne et externe de formes polygonales éventuellement trouées, dont la complexité en temps est respectivement en  $O(n^2 \log n)$  et  $O(n^2)$ , et la mémoire en  $O(n^2)$  et  $O(n)$  respectivement (chapitre 4).

La mise en correspondance des contours est abordée dans le chapitre 5 et nous suggérons quelques solutions pour traiter certains problèmes délicats.

La construction du réseau bissecteur permet ensuite d'obtenir une surface valide de l'objet en guidant de manière directe la triangulation entre les points des différentes sections. Il n'y a donc pas besoin de post-traitements. De plus, l'ajout automatique de portions de coupes intermédiaires dans les zones de changements de topologie ou de variations de morphologie permet une meilleure définition des surfaces générées (chapitre 6).

Dans la dernière partie du mémoire nous discutons les résultats obtenus et nous les comparons avec ceux de deux méthodes existantes (chapitre 7).

**Mots-clés :** Reconstruction 3D, Triangulation, Interpolation, 2D, 3D, Diagramme de Voronoï Généralisé, Réseau Bissecteur, Squelette, Modélisation Géologique, Coupes Parallèles.

## ***Three-dimensional Reconstruction of Complex Objects with the help of Simplified Voronoï Diagrams : An Application to 3D Interpolation of Geological Sections***

### **Abstract :**

Our aim is the problem of the three-dimensional reconstruction of complex objects from cross-sectional contours.

In the first part, we show that the 3D geological modelling requires a various set of tools for modelling and interpolating geological bodies from various types of data (chapter 1). Then, we detail the set of problems of the 3D reconstruction and we propose a full review of the various approaches (chapter 2).

In the second part of the manuscript, we propose an original method of 3D reconstruction. Our approach allows to deal with all the topological variations as multi-branching, holes, and islands, in an automatic and easy way (chapter 3). It builds intermediate sections in a flexible way by interpolating initial contours. This process uses a simplified Voronoï diagram, the bisector network, as a 2D interpolating tool. We propose a full geometric description of the bisector network, and show its low algebraic complexity (linear segments in 2D, portions of plane in 3D). Then, we propose two algorithms for building the internal and external bisector networks of a polygonal shape with holes. They run respectively in  $O(n^2 \log n)$  and  $O(n^2)$  and the memory storage is in  $O(n^2)$  and  $O(n)$  respectively (chapter 4).

In the chapter 5 we discuss the correspondance problem and we suggest some solutions for critical problems.

The building of this structure allows to obtain a valid surface by meshing in a simple way all points of the various sections. Furthermore, by adding automatically portions of intermediate contours in the areas of topological and morphological variations, the method allows a best definition of the reconstructed surface (chapter 6). In the last part we discuss the results of the 3D reconstruction and we compare it with results of others methods (chapter 7).

**Keywords :** 3D Reconstruction, Triangulation, Interpolation, 2D, 3D, Generalized Voronoï Diagram, Bisector Network, Skeleton, Geological Modelling, Parallel Cross-section.